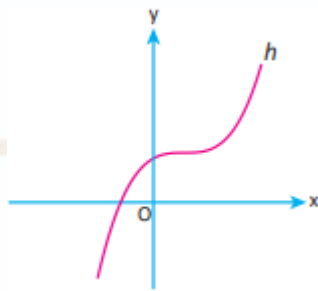
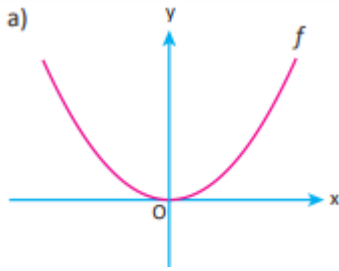


Fonksiyonlarda Bire Birlik ve Örtelik

Grafiği verilmiş bir $f(x)$ fonksiyonunun örteliği veya bire bir olduğunu incelemek için değer aralığındaki her noktadan x eksenine paralel doğrular çizilir. Çizilen doğrular grafiği **en az** bir noktada kesiyorsa, bu fonksiyon örtelidir. Çizilen doğrular grafiği **yalnız** bir noktada kesiyorsa fonksiyon bire birdir. Bu işleme **yatay doğru testi** denir.

Örnek1: Grafikleri verilen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının bire birliğini ve örteliğini inceleyiniz.

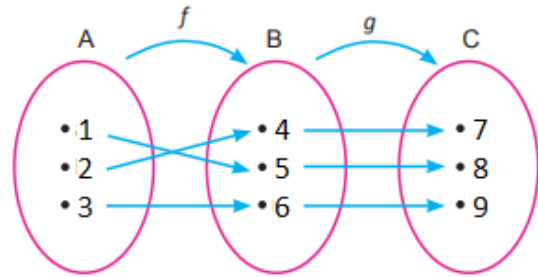


Bileşke Fonksiyon

$f:A \rightarrow B$, $g:B \rightarrow C$ fonksiyonları verilsin. f fonksiyonu örteliği olmak üzere A nın elemanlarını f ve g fonksiyonları ile C nin elemanları ile eşleyen fonksiyona **bileşke fonksiyon** denir. $h=g \circ f$ şeklinde gösterilir.

$g \circ f: A \rightarrow C$, $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ tir. g bileşke f olarak okunur.

Örnek2: $f:A \rightarrow B$ ve $g:B \rightarrow C$ fonksiyonları verilmiştir. $(g \circ f)(b)$ ve $(g \circ f)(c)$ yi bulunuz.



Örnek3: $f = \{(-2,1), (-1,3), (1,0), (3,-3)\}$,
 $g = \{(-3,1), (0,-1), (1,4), (3,2)\}$
fonksiyonları veriliyor. $g \circ f$ bileşke fonksiyonunu bulunuz.

- Fonksiyonlarda bileşke işleminin değişme özelliği yoktur
 $g \circ f \neq f \circ g$
- Bir f fonksiyonunun birim fonksiyon ile bileşkesi kendisine eşittir.
 $f \circ I = I \circ f = f$
- Fonksiyonlarda bileşke işleminin birleşme özelliği vardır.
 $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

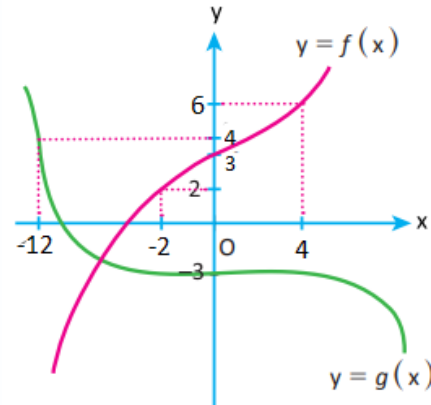
Örnek4: $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 3x+5$ ve $g(x) = 5x-3$ fonksiyonları için $f \circ g$ ve $g \circ f$ fonksiyonlarını bulunuz.

Örnek6: $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x+1$, $g(x) = x+6$, $h(x) = x^2+2$ olmak üzere $[f \circ (g \circ h)](x)$ ve $[(f \circ g) \circ h](x)$ fonksiyonlarını bulunuz.

Örnek5: $f, I: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3+3x$ ve $I(x) = x$ olmak üzere $f \circ I$ ve $I \circ f$ fonksiyonlarını bulunuz.

Örnek7: Grafiğe göre

$$\frac{(f \circ g)(0) - (f \cdot g)(0)}{(f \circ g)(-12)} = ?$$



Örnek8: $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 - 5x - 2$ için
 $(h \circ h \circ h)(5) = ?$

Örnek9: $f, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 5$,
 $h(x+1) = f(x-3) \Rightarrow (h \circ f)(3) = ?$

Örnek10: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ olmak üzere
 $(f \circ f \circ f \dots \circ f)(x) = ?$ (n tane fof vardır.)

Örnek11: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x \Rightarrow f(3x)$ in
 $f(2x+1)$ türünden değeri nedir ?

Bir Fonksiyonun Tersi

$f: A \rightarrow B$ fonksiyonu bire bir ve örten olmak üzere $\forall x \in A$ ve $y \in B$ için $(g \circ f)(x) = x$ ve $(f \circ g)(y) = y$ eşitliklerini sağlayan $g: B \rightarrow A$ fonksiyonuna, f fonksiyonunun **tersi** denir. $g = f^{-1}$ olarak gösterilir.

- $f: A \rightarrow B$ ise $f^{-1}: B \rightarrow A$ dır.
- $f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)$ olur.
- $(x, y) \in f \Rightarrow (y, x) \in f^{-1}$ olur.

Örnek12: $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $f: A \rightarrow B$,
 $f = \{(2, 1), (4, 3), (6, 5)\}$ fonksiyonu veriliyor.
 f fonksiyonunun tersi var mıdır ? Varsa nedir ?

- Bir fonksiyonun tersi ile bileşkesi, birim fonksiyonu verir. Buna göre
- $f \circ f^{-1} = I$ veya $f^{-1} \circ f = I$ olur
- $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ olur.
- $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x) \rightarrow$ fonksiyonun tersinin tersi kendisidir.

- $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = ax + b$ ise $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ dır.

Örnek13: $f(x) = 2x + 4$ fonksiyonunun tersini bulunuz.

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonunun tersi :

$$f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a} \text{ olur. } (f: \mathbb{R} - \left\{ \frac{-d}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\})$$

Örnek14: $f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-3\}$, $f(x) = \frac{mx-2}{x-n}$ olduğuna göre $f(m-n) = ?$

Örnek17: $f(x) = 4x-2$, $(g \circ f)(x) = 8x+6$ ise $g^{-1}(x) = ?$

Örnek18: $f(x) = \frac{3x-5}{x+1} \Rightarrow f^{-1}(5) = ?$

Örnek15: $f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$ olmak üzere $f(x) = \frac{4x+2}{2x-4}$ fonksiyonunun tersi nedir ?

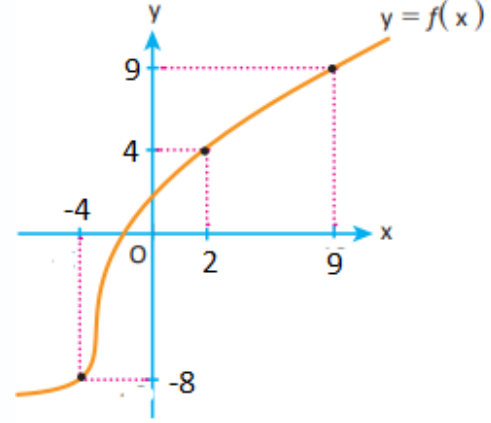
Örnek19: $f(2x+3) = h(x-1) \Rightarrow (h^{-1} \circ f)(5) = ?$

Örnek16: $h\left(\frac{x+1}{x-4}\right) = \frac{3x+2}{x+3} \Rightarrow h^{-1}(x) = ?$

Örnek20: $g(x) = 3x+4$, $h^{-1}(x) = 2x-8$ ise $(h \circ g^{-1})^{-1}(4) = ?$

Örnek21: $f(x) = 3x-8$, $g^{-1}(x) = 2x-8$ ise
 $(g \circ f^{-1})^{-1}(4) = ?$

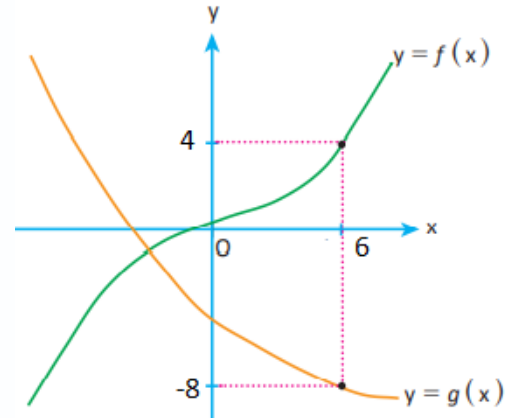
Örnek23: Grafiği verilen $y=f(x)$
fonksiyonuna göre $f(2)+f^{-1}(-8)=?$



Not: $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile
 $y = f^{-1}(x)$ fonksiyonunun grafikleri $y=x$
doğrusuna göre analitik düzlemde
simetrikler.

Örnek22: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+7$
fonksiyonunun ve $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun
grafiklerini çiziniz.

Örnek24: Grafikleri verilen $y = f(x)$ ve
 $y = g(x)$ fonksiyonlarına göre $(g \circ f^{-1})(4) = ?$



Örnek25: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(m+1) = 3+f(m)$ ve $f(1) = 4$ ise f fonksiyonunun kuralı nedir ?

Örnek26: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=2^x$ olmak üzere $f(m+n-2)$ nin $f(m)$ ve $f(n)$ cinsinden değeri nedir ?