

Karmaşık Sayılar

$x^2+9=0$ denkleminde $x^2 = -9$ olduğundan ve karesi negatif olan sayı olmadığından bu denklemin gerçekte sayılar kümesinde bir çözümü yoktur. Bu nedenle yeni bir sayı kümesine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu yüzden gerçekte sayı olmayan ve karesi -1 e eşit olan sayı tanımlanmıştır.

$\sqrt{-1}$ sayısına sanal (imajiner) sayı denir.

$$\sqrt{-1} = i \Rightarrow i^2 = -1$$

Örnek1: $i^2 = -1$ olmak üzere

$\sqrt{-4}, \sqrt{-9}, \sqrt{-48}$ ifadelerinin eşitlerini bulunuz.

- i sayısının kuvvetleri:

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

$$i^5 = i$$

$$i^6 = -1$$

- $n, k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i, & n = 4k + 1 \\ -1, & n = 4k + 2 \\ -i, & n = 4k + 3 \end{cases}$$

Örnek3: Aşağıdakilerin eşitlerini bulunuz.

a) i^{21}

b) i^{15}

c) i^{82}

d) i^{101}

Örnek2: $\frac{\sqrt{-15} \cdot \sqrt{-16}}{\sqrt{-48}} = ?$

Örnek4: $i^2 = -1$ olmak üzere

$$i - i^2 + i^3 - i^4 + \dots - i^{128} = ?$$

- $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ karmaşık sayıları eşit ise, bu iki sayının gerçel ve sanal kısımları da birbirine eşit olur. Yani $z_1 = z_2 \Rightarrow a = c$ ve $b = d$ olur.

Örnek6: $z_1 = 5 - xi$, $z_2 = y + 4i$ karmaşık sayıları eşit ise $x^2 + y^2 = ?$

- $a, b \in \mathbb{R}$ ve i sanal sayı birimi olmak üzere $z = a + ib$ şeklindeki sayılara **karmaşık (kompleks) sayı** denir. Karmaşık sayılar $\mathbb{C}$ ile gösterilir.

$$\mathbb{C} = \{ z \mid z = a + ib, a, b \in \mathbb{R} \}$$

$z = a + ib$ gösteriminde a sayısına, karmaşık sayının **gerçek kısmı** denir. $\text{Re}(z) = a$ ile gösterilir

$z = a + ib$ gösteriminde b sayısına, karmaşık sayının **sanal (imajiner) kısmı** denir ve $\text{Im}(z) = b$ ile gösterilir.

Örnek5: Aşağıdaki sayıların sanal ve gerçel kısımlarını bulunuz.

a) $z_1 = 5 + 2i$

b) $z_2 = -9 - i\sqrt{3}$

c) $z_3 = 2$

d) $z_4 = 0$

e) $z_5 = \frac{1+i}{7}$

- $a, b \in \mathbb{R}$, i sanal sayı birimi olmak üzere $z = a + ib$ verildiğinde $a + i(-b)$ sayısına , z nin **eşleniği** denir. $\bar{z}$ ile gösterilir. $z = a + ib \Rightarrow \bar{z} = a - ib$ dir.

Örnek7: Aşağıdaki karmaşık sayıların eşleniklerini bulunuz.

a) $z_1 = 6 + 5i$

b) $z_2 = -3 - i\sqrt{5}$

c) $z_3 = 5$

d) $z_4 = 7i$

e) $z_5 = 0$

f) $z_6 = \frac{1+i}{7}$

Örnek8: i sanal sayı birimi olmak üzere $z = 3\bar{z} + 2 - 12i$ ise z karmaşık sayısı nedir ?

Çarpma İşlemi

Karmaşık sayılarda çarpma işlemi yapılırken çarpma işleminin çıkarma ve toplama işlemleri üzerine dağılma özelliği kullanılır.

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve i sanal sayı birimi olmak üzere $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ ise

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib) \cdot (c + id) = (a \cdot c - b \cdot d) + i(a \cdot d + b \cdot c)$$

Örnek10: $i^2 = -1$, $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - 2i$ ise $z_1 \cdot z_2$ ve $z_1 \cdot \bar{z}_2$ yi bulunuz.

Karmaşık Sayılarda İşlemler

Toplama ve Çıkarma

Karmaşık sayılarda toplama veya çıkarma işlemleri yapılırken sanal kısımlar sanal kısımlarla, gerçek kısımlar gerçek kısımlarla toplanıp çıkarılır.

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve i sanal sayı birimi olmak üzere $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ ise

$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$$

- $z = a + ib$ olmak üzere $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ dir.

Örnek11: $i^2 = -1$, $z = 2 - 2i \Rightarrow z \cdot \bar{z} = ?$

Örnek9: $i^2 = -1$, $z_1 = 5 + 5i$, $z_2 = +2i$, $z_3 = 1 + i$ ise $z_1 + z_2 - z_3 = ?$

Örnek12: $i^2 = -1$, $(5 - 12i)^4 \cdot (5 + 12i)^4 = ?$

Örnek13: $i^2 = -1$, $z = 4+4i \Rightarrow z^8 = ?$

Bölme İşlemi

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve i sanal sayı birimi olmak üzere $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ ise bölme işlemi, paydanın eşleniği ile genişletilmesi ile yapılır.

$z_2 \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

olur.

Örnek14: $i^2 = -1$, $\frac{2+i}{1-2i} = ?$

Örnek15: $i^2 = -1$, $z = 5 + 12i \Rightarrow \frac{1}{z} = ?$

Karmaşık Sayılarda İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Çözümü

$\Delta < 0$ olduğu durumlarda $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin karmaşık sayılar kümesinde çözümü vardır. Denklemin kökleri :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ veya } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ olur.}$$

i sanal sayı birimi olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin bir kökü $k + mi$ ise diğer kök, eşleniği olan $k - mi$ dir.

Örnek16: $2x^2 + 4x + 8 = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir ?

Örnek17: $x^2 - x + (5a - 3) = 0$ denkleminin sanal kökü olduğu biliniyorsa a nın alabileceği en küçük pozitif tam sayı nedir?

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Kökleri ile Katsayıları Arasındaki İlişkiler

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ veya } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ olmak üzere}$$

Kökler Toplamı: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ olur

Kökler Çarpımı : $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Kökler Farkının Mutlak Değeri: $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

Köklerin Çarpmaya Göre Terslerinin Toplamı :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-b}{c}$$

Köklerin Kareleri Toplamı :

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

Köklerin Küpleri Toplamı :

$$x_1^3 + x_2^3 = \frac{3abc - b^3}{a^3}$$

Örnek18: $x^2 + mx + 2m = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere $x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = 9$ ise $m = ?$

Örnek19: $x^2 - 8x + 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $(2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = ?$

Örnek20: $x^2 + ax + 32 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere $x_1^2 \cdot x_2 = 64$ ise $a = ?$

Örnek21: $-x^2 + 6x + 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere $x_1^2 - 6x_2 + 6 = ?$

Örnek22: Kökleri 2 ve 3 olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem yazınız.

Örnek23: Köklerinden biri $2 - \sqrt{5}$ olan rasyonel katsayılı ve ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem yazınız.

Örnek24: Köklerinden biri $2 + 2i$ olan gerçekte katsayılı ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem yazınız.