

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere, $ax+b=0$ şeklindeki ifadeler, x değişkenine (bilinmeyenine) bağlı **birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem** denir.

Denklemini sağlayan $x \in \mathbb{R}$ değerine **denklemin kökü** denir. Denklemin köklerinden oluşan küme, denklemin **çözüm kümesi** denir, genellikle $\mathbb{C}$ ile gösterilir.

- $ax+b=0$ denkleminde $a \neq 0$ ise denklemin $\mathbb{R}$ de tek kökü vardır :

$$\mathbb{C} = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$$

Örnek1: $x^{(a-2)} + (b+4)x^2 - 6 = 0$ ifadesi, x değişkenine bağlı 1.dereceden bir bilinmeyenli bir denklem ise $a+b=?$

Örnek2: $2m - 3(m+5) - 5(2m+1) = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir ?

Örnek3: $\frac{x}{2} + 2x + m = 3x - \frac{x+1}{5}$ denkleminin bir kökü $x = 2$ ise $m = ?$

Örnek4: $5 + \frac{9}{2 + \frac{5}{1 - \frac{3}{x}}} = 7$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Örnek5: $\frac{3a+2}{a+2}$ ifadesinin tam sayı olması için a hangi tam sayı değerlerini alabilir ?

- $ax+b=0$ denkleminde çözüm kümesi boş ise $a=0$ ve $b \neq 0$ dir.

Örnek6: $3x - 5(x+1) - 7 = 2(-x+4)$ denkleminin çözüm kümesi nedir ?

Örnek9: $(a-1)x - b = 3(2x-7) - 8$ eşitliği $\forall x \in \mathbb{R}$ için sağlanıyorsa $a+b = ?$

Örnek10: $\frac{4}{2 - \frac{a+1}{a-2}}$ ifadesini $\mathbb{R}$ de tanımsız yapan x değerleri toplamını bulunuz.

Örnek7: Bir x değişkenine bağlı $(a+1)x + b - 3 = 5x$ denkleminin $\mathbb{R}$ de çözüm kümesi boş küme ise $a+b$ hangi değeri alamaz ?

Örnek11: $y = \frac{a+1}{2a-3}$ eşitliğinde hangi a değeri için y hesaplanamaz ?

- $ax+b=0$ denkleminin çözüm kümesi $\mathbb{R}$ ise $a=0$ ve $b=0$ dir.

Örnek8: $5(x-2) + 3x = 8x - 10$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$, $b \neq 0$ için $ax + by + c = 0$ şeklindeki ifadelere, x ve y değişkenine bağlı **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem** denir. Denklemin köklerini (x, y) sıralı ikilileri oluşturur. Bu tip denklemleri gerçekte sayılar kümesinde sağlayan sonsuz sayıda (x, y) sıralı ikilisi vardır. Bu ikililer, denklemin çözüm kümesini oluştururlar. Çözüm kümesinin analitik düzlemdeki görüntüsü bir **doğru** belirtir.

Örnek12: $2x + y - 4 = 0$ denklemini sağlayan (x, y) ikililerinin görüntü kümesini analitik düzlemde gösterip grafiğini çiziniz.

Örnek14: $(3a+6)^2 + (b+5)^4 = 0$ ise $a+b = ?$

- $ax + by + c = 0$ denklemi $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için sağlanıyorsa ($\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$) $a=0$, $b=0$, $c=0$ dır.

Örnek15: $(a-3)x + (2b+1)y + c - 4 = 0$ denklemi $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için sağlanıyorsa $a+b+c=?$

- $ax + by + c = 0$ denkleminin çözüm kümesi boş küme ise $a=0$, $b=0$, $c \neq 0$ dır.

Örnek16: $(k+1)x + (m-8)y = n + 3$ denkleminin çözüm kümesi boş küme ise $k+m+n$ kaç olamaz ?

Örnek13: $\left(\frac{3a+2}{5}\right)x + ay = -2$ denklemini sağlayan sıralı ikili $(-1, 2)$ ise $a=?$

Basit Eşitsizlikler

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a < b$, $a \leq b$, $a > b$ veya $a \geq b$ şeklindeki ifadeler **basit eşitsizlikler** denir.

$x, y, a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

- Bir eşitsizliğin her iki tarafına herhangi bir reel sayı eklenip çıkartılırsa eşitsizlik değişmez.

$$x < y \Leftrightarrow x \pm a < y \pm a$$

- Bir eşitsizliğin her iki tarafı pozitif bir sayı ile çarpılırsa eşitsizlik yön değiştirmez ama negatif bir sayı ile çarpılırsa eşitsizlik yön değiştirir.

$$x < y \Leftrightarrow \begin{cases} xa < ya, & a > 0 \\ xa > ya, & a < 0 \end{cases}$$

- Bir eşitsizliğin her iki tarafı pozitif bir sayı ile bölünürse eşitsizlik yön değiştirmez ama negatif bir sayı ile bölünürse eşitsizlik yön değiştirir.

$$x < y \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} < \frac{y}{a}, & a > 0 \\ \frac{x}{a} > \frac{y}{a}, & a < 0 \end{cases}$$

- $<$ işleminin geçişme özelliği vardır

$x < y$ ve $y < z$ ise $x < z$ dir.

- Aynı yönlü eşitsizlikler taraf tarafa toplanabilir ama eşitsizliklerde taraf tarafa çıkarma, çarpma, bölme işlemleri yapılamaz.

$$\begin{array}{r} x < y \\ a < b \\ + \\ \hline x + a < y + b \end{array}$$

- Her iki tarafı da aynı işaretli olan eşitsizliklerde iki tarafın çarpmaya göre tersi alınırsa eşitsizlik yön değiştirir. x ile y aynı işaretli ise

$$x < y \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

- Pozitif sayılardaki eşitsizliklerde iki tarafın da pozitif doğal sayı kuvvetinin alınması, eşitsizliğin yönünü değiştirmez. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$0 < a < b \Rightarrow a^n < b^n$$

- Negatif sayılar arasındaki eşitsizliklerde her iki tarafın tek doğal sayı kuvveti alınırsa eşitsizlik yön değiştirmez. Çift doğal sayı kuvvetleri alınırsa (sıfır hariç) eşitsizlik yön değiştirir. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$a < b < 0 \Rightarrow \begin{cases} a^{2n-1} < b^{2n-1} < 0 \\ a^{2n} > b^{2n} > 0 \end{cases}$$

- 1 den küçük sayıların çift kuvveti kendisinden büyük, tek kuvveti kendisinden küçüktür. $n \in \mathbb{Z}^+ - \{-1\}$ olmak üzere

- $a > 1 \Rightarrow a^n > a$
- $0 < a < 1 \Rightarrow a^n < a$
- $-1 < a < 0 \Rightarrow a^n > a$
- $a < -1 \Rightarrow a^n > a$ (n çift)
- $a < -1 \Rightarrow a^n < a$ (n tek)

- 0 ve 1 arasındaki sayıların karesi kendisinden küçüktür. Tersine, karesi kendisinden küçük olan sayılar 0 ve 1 arasındadır.

$$a^2 < a \Rightarrow 0 < a < 1$$

Örnek17: $x^2 < x \Rightarrow 5x+6$ ifadesinin alabileceği kaç tam sayı değeri vardır ?

Örnek18: $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $-9 < a < 5$, $-2 < b \leq 7$ olduğuna göre $3a + 4b$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır ?

- $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ olmak üzere $ax+b \leq 0$, $ax+b \geq 0$, $ax+b < 0$, $ax+b > 0$ şeklindeki ifadelere, x bilinmeyenine (değişkenine) bağlı **birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik** denir.

Örnek19: $3x + 4 < 6x - 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz ve sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

Örnek20: $5m-7 < 2m+5 < 4m+1$ eşitsizliğini sağlamayan m tam sayıları kaç tanedir ?

Örnek21: x TL'ye mal alan Turgut Bey mallarını $5x-200$ TL'ye sattığına göre, Turgut Bey'in kâr edebilmesi için x en az kaç olmalıdır ?

Örnek22: $4 < x < 9$ olmak üzere $x^2 - 4x + 3$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri ve en büyük değeri bulunuz.

Örnek23: $3a - 2b - 5 = 0$ ve $-2 < b < 2$ ise a'nın en geniş değeri aralığı nedir ?

Örnek25: $4x + 3y > 12$ eşitsizliğinin çözüm kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

- $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$ olmak üzere $ax+by+c \leq 0$, $ax+by+c \geq 0$, $ax+by+c < 0$, $ax+by+c > 0$ tipindeki ifadeler, **birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlik** denir. Eşitsizliği sağlayan (x, y) ikililerine, **eşitsizliğin çözüm kümesi** denir. Çözüm kümesi analitik düzlemde boyalı bölge olarak gösterilir.
- $\leq$ veya $\geq$ işareti varsa doğru üzerindeki noktalar çözüm kümesine aittir ve düz çizgi şeklinde çizilir.
- $<$ veya $>$ işareti varsa doğru üzerindeki noktalar çözüm kümesine ait değildir ve bu yüzden kesikli çizgi şeklinde çizilir.

Örnek24: $2x + y \leq 6$ eşitsizliğinin çözüm kümesini analitik düzlemde gösteriniz.