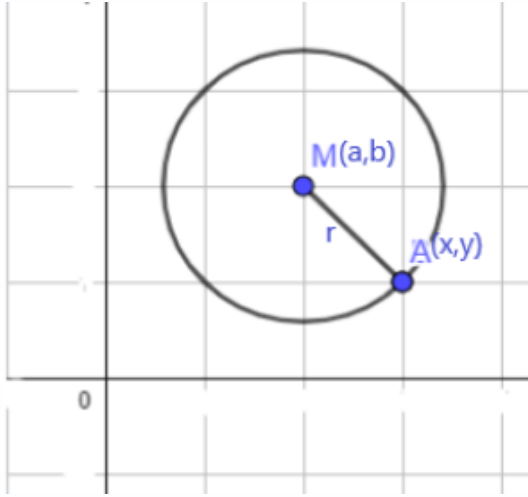


Çemberin Analitik İncelenmesi

Analitik düzlemde seçilen sabit bir $M(a,b)$ noktasına eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine **çember** denir. Seçilen sabit noktaya **çemberin merkezi** denir.



Şekildeki sabit nokta olan $M(a,b)$ ye eşit uzaklıkta bulunan noktalardan herhangi birisi $A(x,y)$ olmak üzere M ile A noktaları arasındaki uzaklığa, bu çemberin **yarıçapı** denir. Yarıçap r ile gösterilir.

İki nokta arası uzaklık formülü kullanılırsa $|MP| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ olur. Her iki tarafın karesi alınırsa

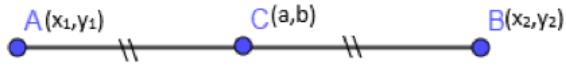
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

denklemini elde edilir. Bu denkleme, **çemberin standart denklemi** denir.

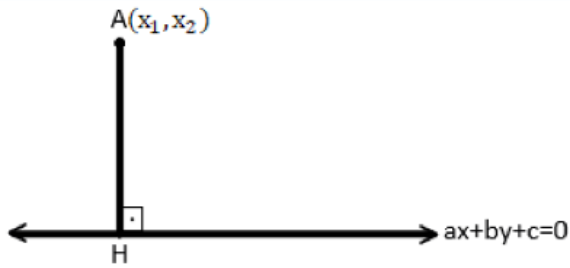
Örnek1: Analitik düzlemde merkezi $M(-2,3)$ ve yarıçapı $r = 5$ birim olan çemberin standart denklemini bulunuz.

Örnek2: Standart denklemi $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$ olan çemberin merkezini ve yarıçapını bulunuz.

Örnek3: Analitik düzlemde merkezi $M(1,2)$ olan ve $P(3,4)$ noktasından geçen çemberin standart denklemini bulunuz.

Orta Nokta Formülü:

$$a = \frac{x_1 + x_2}{2}, b = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Bir Noktanın Bir Doğruya En Kısa Uzaklığı:

$$|AH| = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Örnek4: Analitik düzlemde A(3,5) ve B(7,9) noktaları verilsin. AB doğru parçasını çap kabul eden çemberin standart denklemini bulunuz.

Örnek5: Analitik düzlemde merkezi M(-1,-2) olan çember, denklemi $6x+8y-8=0$ olan doğruya teğet ise bu çemberin standart denklemini bulunuz.

Merkezi x Ekseninde Olan Çemberin Denklemi

Standart Çember Denklemi:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



Çember x ekseninde olduğu için merkezinin ordinatı $b=0$ dır ve $M(a,0)$ olur. Çemberin yarıçapı r birim ise standart denklemini:

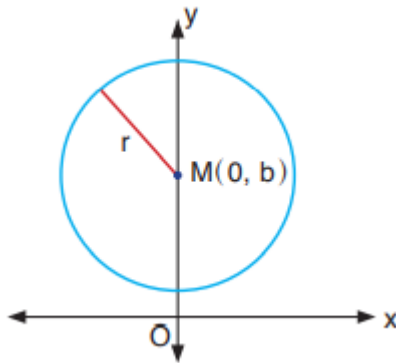
$$(x - a)^2 + (y - 0)^2 = r^2$$

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2$$

Örnek6: Merkezi x ekseninde, apsisi 3 ve yarıçapı 5 birim olan çemberin standart denklemini bulunuz.

Örnek7: Analitik düzlemde merkezi y ekseninde, ordinatı -2 ve yarıçapı 4 birim olan çemberin standart denklemini yazınız.

Merkezi y Ekseninde Olan Çemberin Denklemi



Çember y ekseninde olduğu için merkezinin ordinatı $a=0$ dır ve $M(0,b)$ olur. Çemberin yarıçapı r birim ise standart denklemi:

$$(x - 0)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Merkezi Orijin (Başlangıç Noktası) Olan Çemberin Denklemi

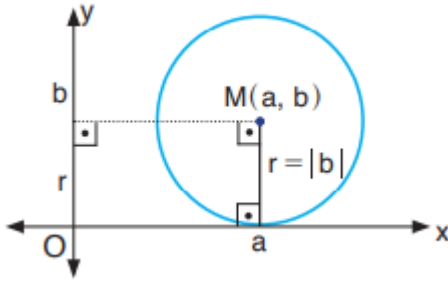
Çemberin merkezi orijinde olduğu için $M(0,0)$ dır. Standart denklemde $a=b=0$ yazılırsa :

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

denklemini elde edilir.

x Eksenine Teğet Olan Çemberin Denklemi

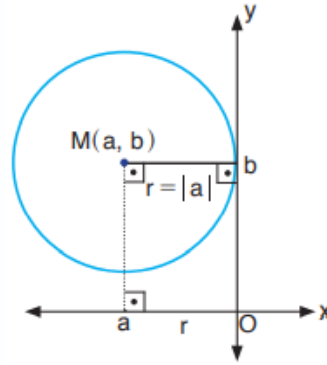


Çember x eksenine teğet olduğundan, çemberin yarıçapı aynı zamanda M noktasının ordinatının mutlak değeri kadardır. Yani $r=|b|$ dir (uzunluk negatif olamayacağı için mutlak değeri alınır.) bu durumda çemberin standart denklemi:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = b^2$$

Örnek8: Analitik düzlemde merkezi $M(-2,2)$ olan ve x eksenine teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz.

y Eksenine Teğet Olan Çemberin Denklemi



Çember y eksenine teğet olduğundan, yarıçapı merkezin apsisinin mutlak değeri kadardır. Yani $r=|a|$ dir. Bu durumda çemberin standart denklemi:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2$$

Örnek9: Analitik düzlemde merkezi $M(-2,2)$ olan ve y eksenine teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz.

Her İki Eksene de Teğet Olan Çember Denklemi

Merkezi $M(a,b)$ ve yarıçapı r birim olan çember iki eksene de teğet ise çemberin yarıçapı $r = |a| = |b|$ olur. Bu durumda çemberin standart denklemi, çemberin bulunduğu bölgeye göre değişiklik gösterir.

Çember ;

I.bölgede ise: $M_1(r,r)$ olacağından

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$$

II.bölgede ise: $M_2(-r,r)$ olacağından

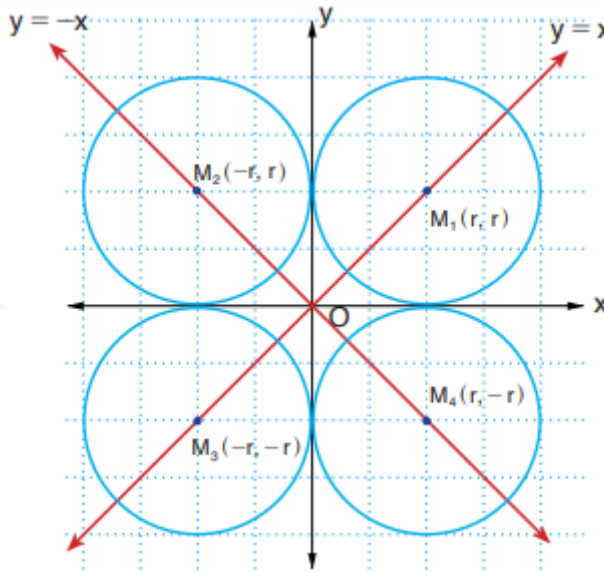
$$(x + r)^2 + (y - r)^2 = r^2$$

III.bölgede ise: $M_3(-r,-r)$ olacağından

$$(x + r)^2 + (y + r)^2 = r^2$$

IV.bölgede ise: $M_4(r,-r)$ olacağından

$$(x - r)^2 + (y + r)^2 = r^2$$



Çemberler her iki eksene de teğet olduğu için merkezler $y = x$ ve $y = -x$ doğruları üzerindedir.

Örnek10: Yarıçapı 3 birim olan ve eksenlere analitik düzlemin II. Bölgesinde teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz.

Örnek11: Analitik düzlemde merkezi $3x - y = 12$ doğrusu üzerinde bulunan ve her iki eksene de II.bölgede teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz.

Örnek12: Analitik düzlemde $x = -1$ ve $x=5$ doğrularına teğet olan, merkezi $x+y -4 = 0$ doğrusu üzerinde bulunan çemberin standart denklemini bulunuz.

Örnek14: Analitik düzlemde $x - 2y + 4 = 0$ ve $-2x + 4y - 20 = 0$ doğrularına teğet olan ve merkezi $x = 1$ doğrusu üzerinde bulunan çemberin merkezini bulunuz.

Örnek13: Analitik düzlemde $y= -1$ ve $y =5$ doğrularına teğet olan, merkezi $x + 2y - 4 = 0$ doğrusu üzerinde bulunan çemberin standart denklemini bulunuz.

Örnek15: Analitik düzlemde merkezi $3x - y - 2 = 0$ denklemi ile verilen doğru üzerinde bulunan, eksenlere analitik düzlemin III.bölgesinde teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz.

Örnek16: Analitik düzlemde merkezi $2x - y + 6 = 0$ doğrusu üzerinde bulunan ve her iki eksene de analitik düzlemin I.bölgesinde teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz.

$a^2 + b^2 - r^2 = F$ ifadesinde r yalnız bırakılırsa:

$$r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} \Rightarrow r = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

bulunur.

$D^2 + E^2 - 4F$ ifadesine $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ çember denkleminin **diskriminantı** denir.

Bu durumda:

- $D^2 + E^2 - 4F > 0 \Rightarrow$ denklem bir çember belirtir
- $D^2 + E^2 - 4F < 0 \Rightarrow$ denklem bir çember belirtmez.
- $D^2 + E^2 - 4F = 0 \Rightarrow$ denklem bir nokta belirtir ve bu noktanın koordinatları $M(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2})$ dir.

$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ denkleminin, çemberin genel denklemleri olabilmesi için **$A=B \neq 0$** olmalıdır. Bu denklem, $A=B=1$ olacak şekilde düzenlenmelidir.

Çemberin genel denkleminde xy li terim yoktur. Yani xy li terimin katsayısı 0 olmalıdır.

Örnek17: $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 21 = 0$ denklemini eğer bir çember belirtiyorsa yarıçapını bulunuz.

Örnek18: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 13 = 0$ denklemini eğer bir çember belirtiyorsa merkezini bulunuz.

Çemberin Genel Denklemi

Çemberin standart denklemleri

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ dir. Bu ifade açılırsa:

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$ elde edilir.

Bu ifadede

$-2a = D$, $-2b = E$, $a^2 + b^2 - r^2 = F$ denirse:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

elde edilir. Bu denkleme, **çemberin genel denklemleri** denir.

$-2a = D \Rightarrow a = \frac{-D}{2}$, $-2b = E \Rightarrow b = \frac{-E}{2}$ olur. Bu durumda çemberin **merkezi**:

$M(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2})$ olur.

Örnek19: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$ denklemi bir çember belirtiyorsa merkezini ve yarıçapını bulunuz.

Örnek22: $(m-3)x^2 + (3m-1)y^2 - 6mx - 4my = -12$ denklemi bir çember belirtiyorsa çemberin merkezini bulunuz.

Örnek20: $x^2 + y^2 - 4x + 6y - q = 0$ denklemi bir çember belirttiğine göre q nun alabileceği en küçük iki tamsayı değerinin toplamını bulunuz.

- Analitik düzlemde $x=a$, $y=b$ doğrularına teğet olan çemberin merkezi $M(a,b)$ noktasından geçen ve eğimi $\tan 45^\circ = 1$ veya $\tan 135^\circ = -1$ olan doğru üzerindedir.
- $P(x_1, y_1)$ noktasından geçen ve eğimi $\tan a = m$ olan doğrunun denklemi $y - y_1 = m(x - x_1)$ dir.

Örnek23: Analitik düzlemde $x=-2$, $y=2$ doğrularına teğet olan ve merkezi $-2x + y - 6 = 0$ doğrusu üzerinde olan çemberlerden büyük olanın merkezini koordinatlarını bulunuz.

Örnek21: $x^2 + y^2 + (p+1)xy - 4py - 5 = 0$ denklemi bir çember belirttiğine göre çemberin yarıçapını bulunuz.