

Mutlak Değer

m bir gerçekte sayı olmak üzere, m nin sıfıra olan uzaklığına m nin **mutlak değeri** denir. Mutlak değeri $|m|$ olarak gösterilir.

$$|m| = \begin{cases} m, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -m, & m < 0 \end{cases}$$

Örnek1: $-8, \frac{3}{4}, 8$ sayılarının mutlak değerlerini bulunuz.

Mutlak değeri alınacak sayı pozitif ise olduğu gibi, negatif ise önüne $-$ işareti konularak mutlak değeri dışına çıkartılır.

$$|-8| = +8 \quad \left|\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4} \quad |8| = 8$$

Örnek2: $|\sqrt{5} - 3| + |3 - \sqrt{5}| = ?$

Bu tür sorularda önce mutlak değeri içerisindeki ifadenin işareti incelenir. İfadenin işareti pozitif ise ifade olduğu gibi, negatif ise önüne eksi konularak mutlak değeri dışına çıkartılır.

$$3 = \sqrt{9} \text{ ve } \sqrt{5} < \sqrt{9} \text{ olduğundan} \\ |\sqrt{5} - 3| = |\sqrt{5} - \sqrt{9}| < 0 \text{ dır.} \\ |3 - \sqrt{5}| = |\sqrt{9} - \sqrt{5}| > 0 \text{ dır.}$$

$$-(\sqrt{5} - 3) + (3 - \sqrt{5}) = -\sqrt{5} + 3 + 3 - \sqrt{5} \\ = 6 - 2\sqrt{5}$$

Örnek3: $x < 0$ olmak üzere

$$|-x| + |2x| - |-3x| = ?$$

$x < 0$ ise $-x$ ve $-3x$ ifadeleri pozitif olup mutlak değeri dışına olduğu gibi, $2x$ ifadesi ise negatif olduğundan mutlak değeri dışına önüne $-$ yazılarak çıkar. Bu durumda işlemin sonucu :

$$|-x| + |2x| - |-3x| = (-x) - 2x - (-3x) \\ = -3x + 3x = 0$$

Örnek4: $3 < m < 5$ olmak üzere

$$|2m-11| + |m-3| - |m-5| = ?$$

$$|2m-11| + |m-3| - |m-5| =$$

$$-(2m-11) + (m-3) - [-(m+5)]$$

$$= -2m+11 + m-3 + m-5$$

$$= 11 - 8 = 3$$

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere

- $|x| \geq 0$
- $|x| = |-x|$
- $|x-y| = |y-x|$
- $|x^n| = |x|^n$
- $k > 0$ için $|k \cdot x| = k \cdot |x|$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, (y \neq 0)$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$ (üçgen eşitsizliği)

Örnek5: $a < 0 < b$ olmak üzere

$$|a-2b| + |b-5a| + |a| - |b| = ?$$

$$|a-2b| + |b-5a| + |a| - |b|$$

$$-(a-2b) + (b-5a) - a - b$$

$$= -a+2b + b-5a - a - b$$

$$= -7a+2b$$

Örnek6: $m < 0$ olmak üzere

$$|-4m| - |-3m| + |m| = ?$$

En içteki kökten başlayarak işlem yapılır.

$$|-4m| - |-3m-m| = |-4m| - |-4m|$$

$$= |-4m+4m| = 0$$

Örnek7: $-5 \leq a-2 \leq 5$ olmak üzere
 $b = |2a-3| \Rightarrow \max b + \min b = ?$

Önce eşitsizliği düzenleyip a'nın değer aralığını bulalım. Verilen eşitsizlikte her tarafa +2 eklenirse: $-3 \leq a \leq 7$ elde edilir. Şimdi bu ifadeyi $|2a-3|$ ye benzetmeliyiz. Her tarafı 2 ile çarparsak:

$-6 \leq 2a \leq 14$ elde edilir ve her yere (-3) eklersek:

$-9 \leq 2a-3 \leq 11$ elde edilir. İfadenin mutlak değeri alınır:

$0 \leq |2a-3| \leq 11$ elde edilir ve bu da b nin eşitidir.

Bu durumda

b nin max değeri = 11 , min değeri = 0

$$11+0 = 11$$

Mutlak Değerli Denklemler

İçerisinde mutlak değerli ifade bulunduran denklemlere **mutlak değerli denklem** denir. Mutlak değerli denklemler, ifade mutlak değerden kurtarıldıktan sonra denklem çözüm yöntemleri ile denklemin çözüm kümesi bulunur.

$a > 0$ olmak üzere $|a| = b \Rightarrow a = b$ veya $a = -b$

Örnek8: $|x| = 5$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$|x| = 5$ ise $x = +5$ veya $x = -5$ tir.

$$\mathbb{C}: \{-5, 5\}$$

Örnek9: $||m+2|-3|=4$ denkleminin çözüm kümesi nedir ?

$$|m+2| - 3 = 4 \quad \text{veya} \quad |m+2| - 3 = -4 \text{ tür.}$$

$$|m+2| = 7 \quad \text{veya} \quad |m+2| = -1 \text{ dir}$$

$m+2 = 7$ veya $m+2 = -7$ olur. $\mathbb{C} = \text{Boş kümedir.}$

$$m+2 = 7 \Rightarrow m = 5 \text{ ve } m+2 = -7 \Rightarrow m = -9$$

$$\mathbb{C} = \{-9, 5\}$$

$$\bullet \quad |a| = |b| \Rightarrow a = b \text{ veya } a = -b$$

Örnek10: $|4a-9| = |2a+3|$ denkleminin çözüm kümesi nedir ?

$$4a - 9 = 2a + 3 \quad \text{veya} \quad 4a - 9 = -2a - 3$$

$$2a = 12$$

$$6a = 6$$

$$a = 6$$

$$a = 1$$

$$\mathbb{C} = \{1, 6\}$$

- $|a| = b \Rightarrow a = b$ veya $a = -b$
 $a = b$ veya $a = -b$ denklemleri
 çözüldüğünde bulunan köklerden
 $b \geq 0$ koşulunu sağlayan kökler,
 verilen mutlak değerli denklemin
 çözüm kümesi olur.

Örnek11: $|2m-7| = 6m+3$ denkleminin çözüm kümesi nedir ?

$$2m-7=6m+3 \quad \text{veya} \quad 2m-7 = -6m-3$$

$$-10 = 4m$$

$$8m = 4$$

$$\frac{-5}{2} = m$$

$$m = \frac{1}{2}$$

$6m+3$ ifadesinde bulduğumuz m değerlerini yerine yazdığımızda görürüz ki $\frac{-5}{2}$ yi yazınca sonuç -12 yani negatif çıkıyor. Bu yüzden $\frac{-5}{2}$ çözüm kümesine dahil edilemez. $m = \frac{1}{2}$ yazdığımızda sonuç pozitif olduğundan çözüm kümesine dahil edilebilir. Bu durumda $\mathbb{C} = \{\frac{1}{2}\}$

Örnek12: $|2m+4| - |3m+6| + |-5m-10| = 4$
denkleminin çözüm kümesi nedir ?

$$|2m+4| = |2(m+2)| ,$$

$$|-3m+6| = |3(m+2)| ,$$

$$|-5m-10| = |-5(m+2)|$$

$$|2(m+2)| - |3(m+2)| + |-5(m+2)| = 4$$

$$4|m+2| = 4 \Rightarrow |m+2| = 1 \text{ dir}$$

$$m+2 = 1 \text{ veya } m+2 = -1 \text{ elde edilir.}$$

$$m = -1 \text{ veya } m = -3 \text{ olur.}$$

$$\text{Bu durumda } \mathbb{C} = \{-3, -1\}$$

- $|x| + |y| = 0 \Rightarrow x=0 \text{ ve } y=0 \text{ dir.}$

Örnek13: $|3m-9| + |5n+20| + |-4k-12| = 0$
 $\Rightarrow m-n-k = ?$

$$|3m-9| = 0 \Rightarrow 3m-9 = 0 \Rightarrow 3m = 9 \text{ ve } m=3$$

$$|5n+20| = 0 \Rightarrow 5n+20 = 0 \Rightarrow 5n = -20$$

$$n = -4$$

$$|-4k-12| = 0 \Rightarrow -4k-12 = 0 \Rightarrow -4k = 12 \text{ ve}$$

$$k = -3$$

$$m-n-k = 3 - (-4) - (-3) = 3+4+3 = 10$$

Örnek14: $|(m-2) \cdot (m-3)| - 4 \cdot |m-3| = 0$
denkleminin çözüm kümesi nedir ?

$$|m-2| \cdot |m-3| - 4 \cdot |m-3| = 0 \text{ ise } |m-3| \text{ parantezine alırsak}$$

$$|m-3| \cdot (|m-2| - 4) = 0 \text{ ise}$$

$$|m-3| = 0 \text{ veya } |m-2| - 4 = 0 \text{ dır}$$

$$|m-3| = 0 \text{ ise } m-3 = 0 \text{ ve } m=3 ,$$

$$|m-2| - 4 = 0 \text{ ise } |m-2| = 4 \text{ elde edilir.}$$

$$m-2 = 4 \text{ veya } m-2 = -4 \text{ dir.}$$

$$m=6 \text{ veya } m = -2 \text{ olur.}$$

$$\mathbb{C} = \{-2, 3, 6\}$$

Mutlak Değerli Eşitsizlikler

- $a \geq 0$ olmak üzere
 $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

Örnek15: $|x| \leq 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulup sayı doğrusunda gösteriniz.

$$-3 < x < 3$$



Örnek16: $|-3m+2| < 6$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir ?

$$-6 < -3m+2 < 6$$

$$-8 < -3m < 4$$

$$\frac{-8}{3} > m > \frac{-4}{3} \Rightarrow \left(\frac{-4}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

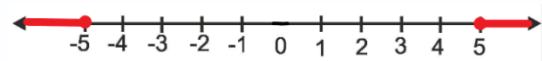
- $a \geq 0$ olmak üzere
 $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ veya } -a \geq x$

Örnek17: $|x| \geq 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulup sayı doğrusunda gösteriniz.

$|x| \geq 5$ ifadesi, sıfıra olan uzaklıkları 5 ve 5 ten büyük olan sayılar demektir.

$$x \geq 5 \text{ veya } x \leq -5$$

$$\mathbb{C}.K = (-\infty, -5] \cup [5, \infty)$$



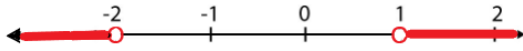
Örnek18: $|2m+1| > 3$ ve $|4m+5| < 13$ eşitsizliklerini sağlayan m tam sayıları toplamını bulunuz

$|2m+1| > 3$ ise $2m+1 > 3$ veya $2m+1 < -3$ tür.

$$2m > 2 \text{ veya } 2m < -4$$

$$m > 1 \text{ veya } m < -2$$

$$(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$$



$$|4m+5| < 13 \Rightarrow -13 < 4m+5 < 13 \text{ olur.}$$

$$-18 < 4m < 18 \Rightarrow \frac{-9}{2} < m < 2 \Rightarrow \left(\frac{-9}{2}, 2\right)$$



- $x \geq 0, y \geq 0$ olmak üzere $x \leq |a| \leq y$ ise $|a| \geq x$ ve $y \geq |a|$ veya $x \leq a \leq y$, $-y \leq |a| \leq -x$

Örnek19: $2 < |a| < 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir ?

$$2 < |a| \quad |a| < 5 \text{ ise } -5 < a < 5$$

$a > 2$ veya $a < -2$ dir.

$$(-5, -2) \cup (2, 5)$$

Örnek20: $4 \leq |3m+7| \leq 8$ eşitsizliğini sağlayan m değerleri toplamı nedir ?

$$4 \leq 3m+7 \leq 8 \text{ veya } -8 \leq 3m+7 \leq -4$$

$$-3 \leq 3m \leq 1 \text{ veya } -15 \leq 3m \leq -11$$

$$-1 \leq m \leq \frac{1}{3} \text{ veya } -5 \leq m \leq \frac{-11}{3}$$

$$\left[-5, \frac{-11}{3}\right] \cup \left[-1, \frac{1}{3}\right] \Rightarrow \{-5, -4, -1, 0\}$$

$$-5 - 4 - 1 + 0 = -10$$

$$\bullet \quad |a| \leq |b| \Rightarrow a^2 \leq b^2$$

Örnek21: $|a+3| < |a-1|$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir ?

$$(a+3)^2 < (a-1)^2$$

$$a^2 + 6a + 9 < a^2 - 2a + 1$$

$$8a < -8 \Rightarrow a < -1$$

$$(-\infty, -1)$$

Örnek22: $|a-1| \leq 5$ olmak üzere $b = |4a-8|$ ifadesinin alabileceği max ve min tam sayı değerleri nelerdir ?

$$-5 \leq a-1 \leq 5 \Rightarrow -4 \leq a \leq 6$$

$$-16 \leq 4a \leq 24 \Rightarrow -24 \leq 4a-8 \leq 16$$

$$0 \leq |4a-8| \leq 24$$

0 ve 24 tür.

Örnek23: $y = |x+2|$ denklemini sağlayan (x,y) ikililerinin kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

$$x \geq -2 \text{ için } y = x+2$$

$$x \leq -2 \text{ için } y = -x-2$$

