

Üslü Sayılar

$a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere n tane a gerçekte sayısının çarpımı

$\underbrace{a.a.a....a}_{n \text{ tane}} = a^n$ şeklinde gösterilir.

a^n sayısı, a nın n . kuvveti (üssü) şeklinde okunur.

- a^n ifadesinde a sayısına **taban**, n sayısına **üs** denir.
- Tüm gerçekte sayıların birinci kuvveti kendisidir.

$\forall a \in \mathbb{R}$ için $a^1 = a$ olur.

$$5^1 = 5, \quad (-8)^1 = -8, \quad \left(\frac{6}{7}\right)^1 = \frac{6}{7}$$

$$3456789^1 = 3456789$$

- Sıfırdan farklı sayıların sıfırıncı kuvveti 1 dir.

$a \neq 0$ olmak üzere $a^0 = 1$ dir.

$$5^0 = 1, \quad (-8)^0 = 1, \quad \left(\frac{6}{7}\right)^0 = 1$$

$$3456789^0 = 1$$

- 0^0 tanımsızdır.
- -1 'in tek kuvvetleri negatif, çift kuvvetleri $+1$ 'dir.

$(-1)^{2n} = 1$ ve $(-1)^{2n+1} = -1$ dir.

$$(-1)^{2010} = +1$$

$$(-1)^{2011} = (-1)$$

- Üs negatif olduğu zaman pay ile payda yer değiştirir, pay ile payda yer değiştirince üssün işareti değişir. Tam sayıların paydası 1 kabul edilir.

$$a, b \neq 0, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ ve } \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$\left(\frac{6}{7}\right)^{-1} = \left(\frac{7}{6}\right)^{+1}$$

$$5^{-1} = \left(\frac{5}{1}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{+1} = \frac{1}{5}$$

$$(-8)^{-1} = \left(\frac{-8}{1}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{-8}\right)^{+1} = -\frac{1}{8}$$

- ! Üssün negatif olması, üslü ifadenin sonucunun negatif olması gerektiği anlamına gelmez. Yani negatif üs, işareti etkilemez. Sadece pay ile paydanın yerini değiştirir.

- Tabanları aynı olan iki üslü sayı çarpılırken, üsleri toplanır.

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \text{ dir.}$$

$$3^5 \cdot 3^6 = 3^{5+6} = 3^{11}$$

$$(-3)^5 \cdot (-3)^6 = (-3)^{5+6} = (-3)^{11}$$

$$3^{(-5)} \cdot 3^6 = 3^{(-5)+6} = 3^{+1}$$

$$\left(\frac{6}{7}\right)^{-20} \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{+10} = \left(\frac{6}{7}\right)^{-20+10} = \left(\frac{6}{7}\right)^{-10}$$

- Üslü ifadenin üssü alınırken üsler çarpılır.

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n} \text{ dir.}$$

$$(5^3)^2 = (5^2)^3 = 5^{3 \cdot 2} = 5^6$$

$$(5^3)^{-2} = (5^{-2})^3 = 5^{3 \cdot (-2)} = 5^{-6}$$

- Tabanları aynı olan iki üslü sayı bölünürken payın üssünden paydanın üssü çıkarılır.

$$a \neq 0 \text{ olmak üzere } \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \text{ dir.}$$

$$\frac{3^{20}}{3^{10}} = 3^{20-10} = 3^{10}$$

$$\frac{3^{-20}}{3^{10}} = 3^{(-20)-(10)} = 3^{-30}$$

$$\frac{3^{20}}{3^{-10}} = 3^{20-(-10)} = 3^{+30}$$

$$\frac{3^{-20}}{3^{-10}} = 3^{(-20)-(-10)} = 3^{-10}$$

- Pozitif gerçel sayıların tüm kuvvetleri pozitiftir.

$$a > 0 \text{ ve } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ olmak üzere } a^n > 0 \text{ dir.}$$

$$+5^3 = +125 \quad (+5)^{-3} = +\frac{1}{125}$$

$$\left(\frac{7}{8}\right)^2 = +\frac{49}{64} \quad \left(\frac{7}{8}\right)^{-2} = +\frac{64}{49}$$

- Negatif gerçel sayıların çift kuvvetleri pozitif ; tek kuvvetleri negatiftir.

$$a < 0 \text{ ve } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ olmak üzere}$$

$$n \text{ tek ise } a^n < 0$$

$$n \text{ çift ise } a^n > 0 \text{ dır.}$$

$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$$

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

- Üsleri aynı olan üslü sayılar çarpılırken tabanlar çarpılıp ortak üs yazılır.

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \text{ dir.}$$

$$5^2 \cdot 3^2 = (5 \cdot 3)^2 = 15^2$$

$$(-2)^8 \cdot (+7)^8 = (-2 \cdot 7)^8 = (-14)^8$$

- Üsleri aynı olan sayılar bölünürken tabanlar bölünür, ortak üs aynen alınır.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0$$

$$\frac{8^{15}}{2^{15}} = \left(\frac{8}{2}\right)^{15} = 4^{15}$$

$$\frac{15^{15}}{3^{15}} = \left(\frac{15}{3}\right)^{15} = 5^{15}$$

- Üsleri aynı olan ifadeler toplanıp çıkarılabilir.

$$x, y \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere,}$$

$$x \cdot a^n + y \cdot a^n = a^n (x+y)$$

$$x \cdot a^n - y \cdot a^n = a^n (x-y)$$

$$5 \cdot 2^x + 7 \cdot 2^x = 2^x (5+7) = 2^x \cdot 12$$

$$3 \cdot 7^a - 5 \cdot 7^a = (3-5) \cdot 7^a = (-2) \cdot 7^a$$

$$\text{Örnek1: } (-5^3) \cdot 5^4 \cdot 5^{-2} \cdot (-5)^2 = ?$$

$$-5^3 = -5 \cdot 5 \cdot 5 = -125 \quad 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

$$-(5^3 \cdot 5^4 \cdot 5^{-2} \cdot 5^2) = -5^{3+4-2+2} = -5^7 \text{ bulunur.}$$

Örnek2: $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{(-a^5) \cdot a^{-2} \cdot (-a)^3 \cdot (-a)^6}{a^3 \cdot a^5 \cdot (-a^4)} = ?$$

$$\begin{aligned} \frac{-a^5 \cdot a^{-2} \cdot -a^3 \cdot a^6}{a^3 \cdot a^5 \cdot -a^4} &= \frac{a^{5-2+3+6}}{-a^{3+5+4}} = \frac{a^{12}}{-a^{12}} \\ &= -a^{12-12} = -a^0 = -1 \end{aligned}$$

Örnek3: $\frac{7^{21} + 7^{23} + 7^{25}}{7^{15} + 7^{17} + 7^{19}} = ?$

$$\frac{7^{21}(1 + 7^2 + 7^4)}{7^{15}(1 + 7^2 + 7^4)} = \frac{7^{21}}{7^{15}} = 7^{21-15} = 7^6$$

Örnek4: $\frac{2^{a+4} + 2^{a+3} - 2^{a+2}}{2^{a+2} + 2^{a+1}} = ?$

$$\begin{aligned} &= \frac{2^a \cdot 2^4 + 2^a \cdot 2^3 - 2^a \cdot 2^2}{2^a \cdot 2^2 + 2^a \cdot 2^1} \\ &= \frac{2^a(2^4 + 2^3 - 2^2)}{2^a(2^2 + 2^1)} = \frac{16 + 8 - 4}{4 + 2} = \frac{20}{6} \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Örnek5: $2^m = 5 \Rightarrow 4^{2m+2} = ?$

$$\begin{aligned} 4^{2m+2} &= 4^{2m} \cdot 4^2 = 2^{4m} \cdot 2^4 = 2^{4m+4} \\ &= 5^4 \cdot 2^4 = 10^4 \end{aligned}$$

Örnek6: $125^3 \cdot 64^2$ işleminin basamak sayısı kaçtır ?

Basamak sayısı hesaplanırken sayıyı 10'un kuvveti şeklinde yazmalıyız.

$$\begin{aligned} 125^3 \cdot 64^2 &= 5^{3 \cdot 3} \cdot 2^{6 \cdot 2} = 5^9 \cdot 2^{12} \\ &= 5^9 \cdot 2^9 \cdot 2^3 = (5^9 \cdot 2^9) \cdot 2^3 \\ &= 10^9 \cdot 2^3 = 8 \cdot 10^9 \\ &= 8000000000 \end{aligned}$$

Çarpımın sondan 9 basamağı sıfır olduğu için basamak sayısı $9+1=10$ 'dur.

Örnek7: $2^m = a$, $3^m = b$, $5^m = c$ ise 90^m nin a, b, c türünden eşiti nedir ?

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \text{ tir.}$$

$$90^m = (2 \cdot 3^2 \cdot 5)^m = 2^m \cdot 3^{2m} \cdot 5^m = a \cdot b^2 \cdot c$$

Örnek8: $24^a = k$, $3^a = m$ ise 64^{a+1} in k ve m türünden değeri nedir ?

$$24 = 2^3 \cdot 3 \Rightarrow 24^a = (2^3 \cdot 3)^a = 2^{3a} \cdot 3^a = k$$

$$2^{3a} \cdot m = k \Rightarrow 8^a = \frac{k}{m} \Rightarrow (8^a)^2 = \frac{k^2}{m^2}$$

$$64^{a+1} = (8^2)^{a+1} = (8^a)^2 \cdot 8^2 = \frac{k^2}{m^2} \cdot 64$$

İçinde üslü ifade bulunduran denklemlere üslü denklem denir.

- Üslü denklemlerde tabanlar eşit ise üsler de eşittir.

$$x^a = x^b \Rightarrow a = b \text{ dir.}$$

$$2^{32} = 2^x \text{ ise } 32 = x$$

$$5^{a-2} = 5^8 \Rightarrow a-2 = 8 \Rightarrow a = 10$$

Örnek9: $3^{2a+4} = 3^{3a-1}$ ise $a = ?$

$$2a+4 = 3a-1 \Rightarrow 5 = a$$

Örnek10: $5^{m+2} + 5^{m+1} = 150 \Rightarrow m = ?$

$$5^m \cdot 5^2 + 5^m \cdot 5^1 = 150$$

$$= 5^m(5^2 + 5^1) = 150 \Rightarrow 5^m \cdot 30 = 150 \\ \Rightarrow 5^m = 5 \Rightarrow m = 1$$

Örnek11: $a, b \in \mathbb{N}$, $2^a \cdot 5^b$ sayısı en küçük 11 basamaklı doğal sayı ise $a+b=?$

En küçük 11 basamaklı doğal sayı, son 10 basamağı sıfır olan 10 000 000 000 sayısıdır.

$$2^a \cdot 5^b = 10^{10}$$

$$2^a \cdot 5^b = (2 \cdot 5)^{10} \Rightarrow 2^a \cdot 5^b = 2^{10} \cdot 5^{10}$$

$$a = 10 \text{ ve } b = 10 \text{ elde edilir. } 10 + 10 = 20$$

Örnek12: $(0,25)^{2-a} = 8^{2a+1}$ ise $a = ?$

$$(0,25)^{2-a} = \left(\frac{25}{100}\right)^{2-a} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2-a} \\ = (4)^{a-2} = (2^2)^{a-2} \\ = 2^{2a-4}$$

$$8^{2a+1} = (2^3)^{2a+1} = 2^{6a+3}$$

$$2^{2a-4} = 2^{6a+3} \Rightarrow 2a-4 = 6a+3 \Rightarrow -7 = 4a$$

$$\Rightarrow \frac{-7}{4} = a$$

- $x, y \neq 0$, $x, y \neq 1$ olmak üzere $x^m = y^m$ olduğu zaman ;

m tek ise $x = y$ dir.

m çift ise $x = y$ veya $x = -y$ dir.

$$2^3 = A^3 \Rightarrow A = 2$$

$$2^4 = A^4 \Rightarrow A = 2 \text{ veya } A = -2$$

Örnek13: $(3a - 1)^3 = (a + 3)^3$

denkleminde a değerini bulunuz.

$$3a-1 = a+3 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

Örnek14: $(4m - 5)^2 = (m + 1)^2$

denkleminin çözüm kümesi nedir ?

$$|4m-5|^2 = |m+1|^2 \Rightarrow$$

$$4m-5 = m+1 \text{ veya } 4m-5 = -m-1$$

$$3m = 6 \quad \text{veya} \quad 5m = 4$$

$$m=2 \quad \text{veya} \quad m = \frac{4}{5}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{4}{5}, 2 \right\}$$

- $m^x=1$ denklemi 3 farklı durumda gerçekleşir:

$m = 1$ ise ;

$m = -1$ ve x çift sayı ise

$x=0$ ve $m \neq 0$ ise

Betül

Hoca

Örnek15: $(a + 1)^{3a+7} = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$(a + 1)^{3a+7} = 1 \text{ ise}$$

- I. $3x+7 = 0 \Rightarrow x = \frac{-7}{3}$
- II. $x+1 = 1 \Rightarrow x=0$
- III. $x+1 = -1 \Rightarrow x = -2$ olur. Bu durumda üs çift olmalıdır. x yerine -2 yazarsak $3.(-2)+ = -6+7= +1$ olur. +1 tek sayı olduğundan çözüm olarak alınamaz.
 $\zeta = \{\frac{-7}{3}, 0\}$

Örnek17: $3^a = 2$, $16^b = 27$ ise a.b=?

$$16^b = (2^4)^b = (2)^{4b} = 3^3 \text{ (2 yerine } 3^a \text{ yazalım)}$$

$$(3^a)^{4b} = 3^3 \Rightarrow 3^{4ab} = 3^3 \Rightarrow 4ab = 3$$

$$ab = \frac{3}{4}$$

Örnek18: $2^a = x$, $5^b = y$ ise $16^a \cdot 125^b$ ifadesinin x ve y türünden eşiti nedir ?

$$16^a \cdot 125^b = (2^4)^a \cdot (5^3)^b = (2^a)^4 \cdot (5^b)^3 = x^4 \cdot y^3$$

Örnek16: $(m^2 - 3)^{m^2-4} = 1$ denklemini sağlayan m değerleri nelerdir ?

- I. $m^2-4 = 0 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$ olur. $m = \pm 2$ için $m^2-3 \neq 0$ dır
- II. $m^2-3=1 \Rightarrow m^2= 4 \Rightarrow m=\pm 2$
- III. $m^2-3 = -1$ ise üs çift olmalıdır. $m=\pm\sqrt{2}$ olur. Yerine yazınca üs -2 bulunur. -2 çift olduğu için sağlanır. Bu durumda

$$\zeta = \{-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\} \text{ bulunur.}$$

$$x^a = y^k \text{ ve}$$

$$x^b = y^m \text{ ise } \frac{a}{b} = \frac{k}{m} \text{ dir.}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2^a = 3^b \\ 2^5 = 3^7 \end{array} \right\} \frac{a}{5} = \frac{b}{7}$$