

Üslü Sayılar

$a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere n tane a gerçekte sayısının çarpımı

$\underbrace{a.a.a....a}_{n \text{ tane}} = a^n$ şeklinde gösterilir.

a^n sayısı, a nın n . kuvveti (üssü) şeklinde okunur.

- a^n ifadesinde a sayısına **taban**, n sayısına **üs** denir.
- Tüm gerçekte sayıların birinci kuvveti kendisidir.

$\forall a \in \mathbb{R}$ için $a^1 = a$ olur.

$$5^1 = 5, \quad (-8)^1 = -8, \quad \left(\frac{6}{7}\right)^1 = \frac{6}{7}$$

$$3456789^1 = 3456789$$

- Sıfırdan farklı sayıların sıfırıncı kuvveti 1 dir.

$a \neq 0$ olmak üzere $a^0 = 1$ dir.

$$5^0 = 1, \quad (-8)^0 = 1, \quad \left(\frac{6}{7}\right)^0 = 1$$

$$3456789^0 = 1$$

- 0^0 tanımsızdır.
- -1 'in tek kuvvetleri negatif, çift kuvvetleri $+1$ 'dir.

$(-1)^{2n} = 1$ ve $(-1)^{2n+1} = -1$ dir.

$$(-1)^{2010} = +1$$

$$(-1)^{2011} = (-1)$$

- Üs negatif olduğu zaman pay ile payda yer değiştirir, pay ile payda yer değiştirince üssün işareti değişir. Tam sayıların paydası 1 kabul edilir.

$$a, b \neq 0, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ ve } \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$\left(\frac{6}{7}\right)^{-1} = \left(\frac{7}{6}\right)^{+1}$$

$$5^{-1} = \left(\frac{5}{1}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{+1} = \frac{1}{5}$$

$$(-8)^{-1} = \left(\frac{-8}{1}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{-8}\right)^{+1} = -\frac{1}{8}$$

- ! Üssün negatif olması, üslü ifadenin sonucunun negatif olması gerektiği anlamına gelmez. Yani negatif üs, işareti etkilemez. Sadece pay ile paydanın yerini değiştirir.

- Tabanları aynı olan iki üslü sayı çarpılırken, üsleri toplanır.

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \text{ dir.}$$

$$3^5 \cdot 3^6 = 3^{5+6} = 3^{11}$$

$$(-3)^5 \cdot (-3)^6 = (-3)^{5+6} = (-3)^{11}$$

$$3^{(-5)} \cdot 3^6 = 3^{(-5)+6} = 3^{+1}$$

$$\left(\frac{6}{7}\right)^{-20} \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{+10} = \left(\frac{6}{7}\right)^{-20+10} = \left(\frac{6}{7}\right)^{-10}$$

- Üslü ifadenin üssü alınırken üsler çarpılır.

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n} \text{ dir.}$$

$$(5^3)^2 = (5^2)^3 = 5^{3 \cdot 2} = 5^6$$

$$(5^3)^{-2} = (5^{-2})^3 = 5^{3 \cdot (-2)} = 5^{-6}$$

- Tabanları aynı olan iki üslü sayı bölünürken payın üssünden paydanın üssü çıkarılır.

$$a \neq 0 \text{ olmak üzere } \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \text{ dir.}$$

$$\frac{3^{20}}{3^{10}} = 3^{20-10} = 3^{10}$$

$$\frac{3^{-20}}{3^{10}} = 3^{(-20)-(10)} = 3^{-30}$$

$$\frac{3^{20}}{3^{-10}} = 3^{20-(-10)} = 3^{+30}$$

$$\frac{3^{-20}}{3^{-10}} = 3^{(-20)-(-10)} = 3^{-10}$$

- Pozitif gerçel sayıların tüm kuvvetleri pozitifdir.

$$a > 0 \text{ ve } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ olmak üzere } a^n > 0 \text{ dir.}$$

$$+5^3 = +125 \quad (+5)^{-3} = +\frac{1}{125}$$

$$\left(\frac{7}{8}\right)^2 = +\frac{49}{64} \quad \left(\frac{7}{8}\right)^{-2} = +\frac{64}{49}$$

- Negatif gerçel sayıların çift kuvvetleri pozitif ; tek kuvvetleri negatiftir.

$$a < 0 \text{ ve } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ olmak üzere}$$

$$n \text{ tek ise } a^n < 0$$

$$n \text{ çift ise } a^n > 0 \text{ dir.}$$

$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$$

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

- Üsleri aynı olan üslü sayılar çarpılırken tabanlar çarpılıp ortak üs yazılır.

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \text{ dir.}$$

$$5^2 \cdot 3^2 = (5 \cdot 3)^2 = 15^2$$

$$(-2)^8 \cdot (+7)^8 = (-2 \cdot 7)^8 = (-14)^8$$

- Üsleri aynı olan sayılar bölünürken tabanlar bölünür, ortak üs aynen alınır.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0$$

$$\frac{8^{15}}{2^{15}} = \left(\frac{8}{2}\right)^{15} = 4^{15}$$

$$\frac{15^{15}}{3^{15}} = \left(\frac{15}{3}\right)^{15} = 5^{15}$$

- Üsleri aynı olan ifadeler toplanıp çıkarılabilir.

$$x, y \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere,}$$

$$x \cdot a^n + y \cdot a^n = a^n (x+y)$$

$$x \cdot a^n - y \cdot a^n = a^n (x-y)$$

$$5 \cdot 2^x + 7 \cdot 2^x = 2^x (5+7) = 2^x \cdot 12$$

$$3 \cdot 7^a - 5 \cdot 7^a = (3-5) \cdot 7^a = (-2) \cdot 7^a$$

$$\text{Örnek1: } (-5^3) \cdot 5^4 \cdot 5^{-2} \cdot (-5)^2 = ?$$

Örnek2: $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{(-a^5) \cdot a^{-2} \cdot (-a)^3 \cdot (-a)^6}{a^3 \cdot a^5 \cdot (-a^4)} = ?$$

Örnek6: $125^3 \cdot 64^2$ işleminin basamak sayısı kaçtır ?

Örnek7: $2^m = a$, $3^m = b$, $5^m = c$ ise 90^m nin a, b, c türünden eşiti nedir ?

Örnek3: $\frac{7^{21} + 7^{23} + 7^{25}}{7^{15} + 7^{17} + 7^{19}} = ?$

Örnek8: $24^a = k$, $3^a = m$ ise 64^{a+1} in k ve m türünden değeri nedir ?

Örnek4: $\frac{2^{a+4} + 2^{a+3} - 2^{a+2}}{2^{a+2} + 2^{a+1}} = ?$

İçinde üslü ifade bulunduran denklemlere üslü denklem denir.

- Üslü denklemlerde tabanlar eşit ise üsler de eşittir.

$$x^a = x^b \Rightarrow a = b \text{ dir.}$$

$$2^{32} = 2^x \text{ ise } 32 = x$$

$$5^{a-2} = 5^8 \Rightarrow a-2 = 8 \Rightarrow a = 10$$

Örnek9: $3^{2a+4} = 3^{3a-1}$ ise $a = ?$

Örnek5: $2^m = 5 \Rightarrow 4^{2m+2} = ?$

Betül
Hoca

Örnek10: $5^{m+2} + 5^{m+1} = 150 \Rightarrow m = ?$

Örnek14: $(4m - 5)^2 = (m + 1)^2$
denkleminin çözüm kümesi nedir ?

Örnek11: $a, b \in \mathbb{N}$, $2^a \cdot 5^b$ sayısı en küçük
11 basamaklı doğal sayı ise $a+b=?$

- $m^x=1$ denklemi 3 farklı durumda gerçekleşir:

- $m = 1$ ise ;
- $m = -1$ ve x çift sayı ise
- $x=0$ ve $m \neq 0$ ise

Örnek12: $(0,25)^{2-a} = 8^{2a+1}$ ise $a = ?$

Örnek15: $(a + 1)^{3a+7} = 1$ denkleminin
çözüm kümesini bulunuz.

- $x, y \neq 0$, $x, y \neq 1$ olmak üzere
 $x^m = y^m$ olduğu zaman ;

m tek ise $x = y$ dir.
 m çift ise $x = y$ veya $x = -y$ dir.

Örnek16: $(m^2 - 3)^{m^2-4} = 1$ denklemini
sağlayan m değerleri nelerdir ?

$$2^3 = A^3 \Rightarrow A = 2$$

$$2^4 = A^4 \Rightarrow A = 2 \text{ veya } A = -2$$

Örnek13: $(3a - 1)^3 = (a + 3)^3$
denkleminde a değerini bulunuz.

Betül
Hoca

$$x^a = y^k \text{ ve}$$

$$x^b = y^m \text{ ise } \frac{a}{b} = \frac{k}{m} \text{ dir.}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2^a = 3^b \\ 2^5 = 3^7 \end{array} \right\} \frac{a}{5} = \frac{b}{7}$$

Örnek17: $3^a = 2$, $16^b = 27$ ise $a.b=?$

Örnek18: $2^a = x$, $5^b = y$ ise $16^a \cdot 125^b$ ifadesinin x ve y türünden eşiti nedir ?