

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizlikler

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere, $ax+b=0$ şeklindeki ifadeler, x değişkenine (bilinmeyenine) bağlı **birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem** denir.

Denklemleri sağlayan $x \in \mathbb{R}$ değerine **denklemin kökü** denir. Denklemin köklerinden oluşan kümeye, denklemin **çözüm kümesi** denir, genellikle $\mathbb{C}$ ile gösterilir.

- $ax+b=0$ denkleminde $a \neq 0$ ise denklemin $\mathbb{R}$ de tek kökü vardır :

$$\mathbb{C} = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$$

Örnek1: $x^{(a-2)} + (b+4)x^2 - 6 = 0$ ifadesi, x değişkenine bağlı 1.dereceden bir bilinmeyenli bir denklem ise $a+b=?$

$(b+4)x^2$ teriminde x^2 ifadesi ikinci dereceden bir denklem olduğundan x^2 nin katsayısı 0 olmalıdır. O halde $b + 4 = 0$ olmalı ve buradan $b = -4$ bulunur. Verilen denklemin birinci dereceden olması istendiği için x in en büyük kuvvetinin 1 olması gerekir. Bu durumda $a - 2 = 1$ ise $a = 3$ bulunur.

$$a+b = 3 - 4 = -1 \text{ olur.}$$

Örnek2: $2m - 3(m+5) - 5(2m+1) = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir ?

$$2m - 3m - 15 - 10m - 5 = 0$$

$$-11m - 20 = 0 \Rightarrow -11m = 20 \text{ ve } m = \frac{-20}{11}$$

Örnek3: $\frac{x}{2} + 2x + m = 3x - \frac{x+1}{5}$ denkleminin bir kökü $x = 2$ ise $m = ?$

Denklemin bir kökü $x = 2$ ise x yerine 2 yazarsak :

$$\frac{2}{2} + 2.2 + m = 3.2 - \frac{2+1}{5}$$

$$1 + 4 + m = 6 - \frac{3}{5} \Rightarrow 5 + m = \frac{27}{5} \text{ ve } m = \frac{2}{5}$$

Örnek4: $6 + \frac{9}{2 + \frac{5}{1 - \frac{3}{x}}} = 7$ denkleminin çözüm

kümesini bulunuz.

$$\frac{9}{2 + \frac{5}{1 - \frac{3}{x}}} = 1 \text{ olmalı.}$$

$$2 + \frac{5}{1 - \frac{3}{x}} = 9 \text{ olmalı.}$$

$$\frac{5}{1 - \frac{3}{x}} = 7 \text{ olmalı. } \frac{5}{\frac{x-3}{x}} = 7 \Rightarrow \frac{5x}{x-3} = 7$$

$$7x - 21 = 5x \Rightarrow 2x = 21 \text{ ve } x = \frac{21}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek5: $\frac{3a+2}{a+2}$ ifadesinin tam sayı olması için a hangi tam sayı değerlerini alabilir ?

$\frac{3a+2}{a+2} = \frac{3(a+2)-4}{a+2} = 3 - \frac{4}{a+2}$ şeklinde yazılırsa $a+2$ sayısının 4 ün böleni olması gerekir. 4'ün bölenleri 1,2,4,-1,-2,-4 olduğundan

$$a+2 = 1 \text{ ise } a = -1$$

$$a+2 = 2 \text{ ise } a = 0$$

$$a+2 = 4 \text{ ise } a = 2$$

$$a+2 = -1 \text{ ise } a = -3$$

$$a+2 = -2 \text{ ise } a = -4$$

$$a+2 = -4 \text{ ise } a = -6 \text{ olur ve } a \text{ nın değerleri toplamı : } -1+2-3-4-6 = -12 \text{ bulunur.}$$

- $ax+b=0$ denkleminde çözüm kümesi boş ise $a=0$ ve $b \neq 0$ dir.

Örnek6: $3x - 5(x+1) - 7 = 2(-x+4)$ denkleminin çözüm kümesi nedir ?

$$3x - 5x - 5 - 7 = -2x + 8$$

$$-2x - 12 = -2x + 8$$

$-12 = 8$ eşitliği yanlış olduğundan denklemin çözümü $\emptyset$ olur.

Örnek7: Bir x değişkenine bağlı $(a+1)x + b - 3 = 5x$ denkleminin R de çözüm kümesi boş küme ise $a+b$ hangi değeri alamaz ?

$ax + x + b - 3 = 5x$ denklemini düzenleyelim.

$$x(a+1-5) + b - 3 = 0$$

$x(a-4) + b - 3 = 0$ bulunur. $\emptyset$ olduğundan $a - 4 = 0$ ve $a = 4$, $b - 3 \neq 0$ ve $b \neq 3$ olmalıdır. Buna göre

$a + b \neq 7$ bulunur.

- $ax+b=0$ denkleminin çözüm kümesi R ise $a=0$ ve $b=0$ dir.

Örnek8: $5(x-2) + 3x = 8x - 10$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

$$5x - 10 + 3x = 8x - 10$$

$$8x - 10 = 8x - 10$$

$0 = 0$ bulunur. Bu durumda her $x \in R$ için denklem sağlanır.

Örnek9: $(a-1)x - b = 3(2x-7) - 8$ eşitliği $\forall x \in R$ için sağlanıyorsa $a+b = ?$

$$ax - x - b = 6x - 21 - 8$$

$$x(a - 1 - 6) - b + 29 = 0$$

$$x(a - 7) - b + 29 = 0 \text{ ve}$$

$a = 7$, $b = 29$ olur. Bu durumda $a+b = 7+29 = 36$

Örnek10: $\frac{4}{2 - \frac{a+1}{a-2}}$ ifadesini R de tanımsız yapan x değerleri toplamını bulunuz.

$a-2 = 0$ için verilen ifade tanımsızdır. Buradan $a = 2$ bulunur.

$$\frac{4}{2 - \frac{a+1}{a-2}} = \frac{4}{\frac{2a-4-a-1}{a-2}} = \frac{4}{\frac{a-5}{a-2}} = \frac{4(a-2)}{a-5}$$

olduğundan son ifadede $a = 5$ için de tanımsız olur. O halde ifadeyi tanımsız yapan a değerlerinin toplamı $2+5 = 7$ olur.

Örnek11: $x < y < z < m$ olmak üzere x, y, z, m tam sayılarının üçerli toplamı 29, 34, 43, 71 ise $z = ?$

Bu sayıların toplamı $x+y+z+m = A$ olsun.

Bu durumda

$$x = A-71$$

$$y = A-43$$

$$z = A-34$$

$$m = A-29 \text{ olduğundan}$$

$$(A-71) + (A-43) + (A-34) + (A-29) = A \text{ ise}$$

$4A-177 = A$ ve $3A = 177$ ise $A = 59$ bulunur. O halde $Z = A - 34 \Rightarrow Z = 59 - 34 = 25$ bulunur.

Örnek12: $y = \frac{a+1}{2a-3}$ eşitliğinde hangi a değeri için y hesaplanamaz ?

$2a-3 = 0$ ise $a = \frac{3}{2}$ için y hesaplanamaz.

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler

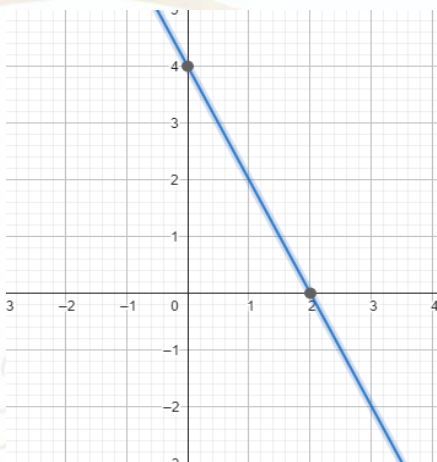
$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$, $b \neq 0$ için $ax+by+c=0$ şeklindeki ifadeler, x ve y değişkenine bağlı **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem** denir. Denklemin köklerini (x,y) sıralı ikilileri oluşturur. Bu tip denklemleri gerçek sayılar kümesinde sağlayan sonsuz sayıda (x,y) sıralı ikilisi vardır. Bu ikililer, denklemin çözüm kümesini oluştururlar. Çözüm kümesinin analitik düzlemdeki görüntüsü bir **doğru** belirtir.

Örnek13: $2x + y - 4 = 0$ denklemini sağlayan (x,y) ikililerinin görüntü kümesini analitik düzlemde gösterip grafiğini çiziniz.

$x = 0$ için $y = 4$

$y = 0$ için $x = 2$ bulunur. Düzlemde herhangi iki noktadan tek doğru geçer. Bu iki nokta, doğrunun eksenleri kestiği noktalar olarak alınır. Bu da grafik çizimini kolaylaştırır.

Bu doğru (0,4) ve (2,0) noktalarından geçer



Örnek14: $(\frac{3a+2}{5})x + ay = -2$ denklemini sağlayan sıralı ikili (-1,2) ise a=?

Denklemi sağlayan sıralı ikili (-1,2) ise $x = -1$, $y = 2$ yazılıp yerine konulursa :

$$(-1) \cdot (\frac{3a+2}{5}) + 2a = -2 \Rightarrow \frac{-3a-2}{5} + 2a = -2$$

$$\frac{-3a-2+10a}{5} = -2 \Rightarrow 7a-2 = -10$$

$$a = \frac{-8}{7} \text{ bulunur.}$$

Örnek15: $(3a-6)^2 + (b+5)^4 = 0$ ise $a+b = ?$

$3a-6 \geq 0$ ve $b+5 \geq 0$ olduğundan bu eşitlik sadece $0+0 = 0$ olduğunda sağlanır.

$$3a-6 = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$b+5 = 0 \Rightarrow b = -5 \text{ bulunur. } a+b=2-5 = -3 \text{ olur.}$$

- $ax+by+c=0$ denkleminin $\forall x,y \in \mathbb{R}$ için sağlanıyorsa ($\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$) $a=0$, $b=0$, $c=0$ dır.

Örnek16: $(a-3)x + (2b+1)y + c - 4 = 0$ denkleminin $\forall x,y \in \mathbb{R}$ için sağlanıyorsa $a+b+c=?$

Her $x,y \in \mathbb{R}$ için sağlanıyorsa

$$a-3 = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$2b+1 = 0 \Rightarrow b = \frac{-1}{2}$$

$$c-4 = 0 \Rightarrow c = 4$$

$$a+b+c = 3 + \frac{-1}{2} + 4 = \frac{13}{2} \text{ olur.}$$

- $ax+by+c=0$ denkleminin çözüm kümesi boş küme ise $a=0$, $b=0$, $c \neq 0$ dır.

Örnek17: $(k+1)x + (m-8)y = n+3$ denkleminin çözüm kümesi boş küme ise $k+m+n$ kaç olamaz ?

$$k+1 = 0 \Rightarrow k = -1$$

$$m-8 = 0 \Rightarrow m = 8$$

$$n+3 \neq 0 \Rightarrow n \neq -3 \text{ ise } k+m+n \neq -1+8-3 \neq 4$$