

Fonksiyonlar

$A \neq B$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ olmak üzere

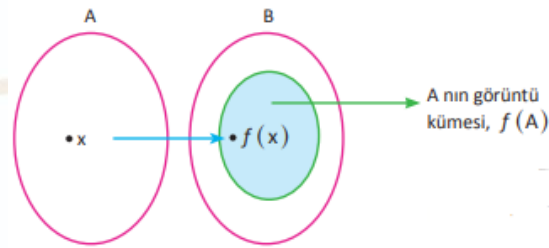
$AXB = \{(x,y) : x \in A, y \in B\}$ Kartezyen çarpım kümesinin her alt kümesine A dan B ye **bağıntı** denir. A dan B ye tanımlanan bir f bağıntısının fonksiyon olması için:

- 1) A kümesinde eşleşmemiş eleman kalmamalıdır. Yani $\forall x \in A$ için $(x,y) \in f$ olacak şekilde bir $y \in B$ vardır.
- 2) A kümesindeki herhangi bir eleman, B kümesinde yalnız bir elemanla eşleşmelidir. $(x,y_1) \in f$ ve $(x,y_2) \in f$ olduğunda $y_1 = y_2$ oluyorsa F bağıntısına A dan B ye **fonksiyon** denir.

A dan B ye tanımlanan f fonksiyonu $f: A \rightarrow B$ şeklinde gösterilir. $(x,y) \in f \Rightarrow y = f(x)$ şeklinde yazılır. Burada x **bağımsız değişken**, y **bağımlı değişkendir**.

$f: A \rightarrow B$ gösteriminde A kümesi, fonksiyonun **tanım kümesi**, B kümesi fonksiyonun **değer kümesidir**.

A daki elemanların f fonksiyonu ile B deki eşleştiği elemanlardan oluşan kümeye, fonksiyonun **görüntü kümesi** denir ve $f(A)$ ile gösterilir. $f(A) \subset B$ dir.



$A \rightarrow$ Tanım Kümesi

$B \rightarrow$ Değer Kümesi

$f(A) \rightarrow$ Görüntü Kümesi

Örnek1: $X = \{1,2,3\}$ kümesinden $Y = \{a,b,c,d\}$ kümesine tanımlanan aşağıdaki bağıntılardan hangileri fonksiyondur ?

a) $\beta_1 = \{(1,c),(2,d),(3,a)\}$

X kümesindeki herhangi bir eleman, Y kümesinde bulunan yalnız bir eleman ile eşleştiğinden β_1 bağıntısı bir fonksiyondur.

b) $\beta_2 = \{(1,d),(2,d),(3,d)\}$

X kümesindeki herhangi bir eleman, Y kümesinde bulunan yalnız bir eleman ile eşleştiğinden β_2 bağıntısı bir fonksiyondur.

c) $\beta_3 = \{(1,c),(3,d)\}$

X kümesindeki "2" elemanı, Y kümesindeki herhangi bir elemanlar eşleşmediğinden bu bağıntı fonksiyon değildir.

d) $\beta_4 = \{(1,a),(3,c),(3,d),(2,a)\}$

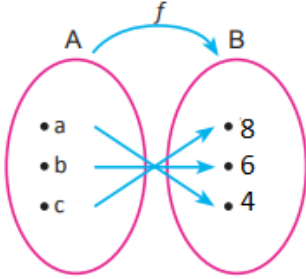
X kümesindeki "3" elemanı, Y kümesindeki birden fazla elemanla eşleştiği için bu bağıntı fonksiyon değildir.

Not: Bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için tanıma kümesinde eşleşmeyen eleman kalmamalıdır ve tanım kümesindeki her eleman, değer kümesindeki yalnızca bir elemanla eşleşebilir.

Not: Her fonksiyon bir bağıntıdır fakat her bağıntı bir fonksiyon değildir.

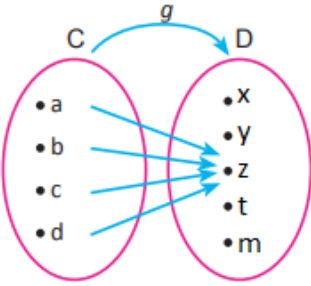
Örnek2: Aşağıdaki şekillerden hangileri fonksiyondur ?

a)



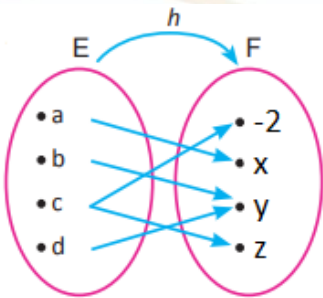
A kümesindeki her eleman, değer kümesinde bulunan yalnız bir elemanla eşleştiği için bu bağıntı bir fonksiyondur.

b)



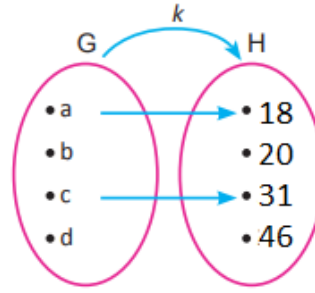
C kümesindeki her eleman, değer kümesinde bulunan yalnız bir elemanla eşleştiği için g bağıntısı bir fonksiyondur. C kümesindeki her elemanın D kümesinde aynı eleman ile eşleşmesi fonksiyon olmasını etkilemez.

c)



E kümesindeki "c" elemanı, F kümesindeki birden fazla eleman ile eşleştiği için h bağıntısı fonksiyon değildir.

d)



G kümesindeki "b" ve "d" elemanları, H kümesindeki hiçbir eleman ile eşleşmediği için k bağıntısı fonksiyon değildir.

Örnek3: $y = f(x) = x^2 - x + 5$ ise $f(3)$, $f(x+1)$, $f(2x)$, $f(x^2)$ ve $f(m)$ ifadelerini bulunuz.

- $f(3) = 3^2 - 3 + 5 = 9 - 3 + 5 = 11$
- $f(x+1) = (x+1)^2 - (x+1) + 5 = x^2 + 2x + 1 - x - 1 + 5 = x^2 + x + 5$
- $f(2x) = (2x)^2 - 2x + 5 = 4x^2 - 2x + 5$
- $f(x^2) = (x^2)^2 - x^2 + 5 = x^4 - x^2 + 5$
- $f(m) = m^2 - m + 5$

Örnek4: Aşağıdakilerden hangileri fonksiyondur?

a) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 2x+5$

$\forall x \in \mathbb{N}$ için $(2x+5) \in \mathbb{N}$ ve her elemanın yalnız bir görüntüsü olduğundan f bir fonksiyondur.

b) $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, g(x) = 5x/6$

$\exists x \in \mathbb{Z}$ için $5x/6 \notin \mathbb{N}$ olduğundan g fonksiyon değildir.

c) $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, h(x) = x^2$

$\forall x \in \mathbb{Z}$ için $x^2 \in \mathbb{Z}$ ve her elemanın yalnız bir görüntüsü olduğundan h bir fonksiyondur.

d) $t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t(x) = 4/x - 1$

$x=1$ için $t(1) = 4/0 \notin \mathbb{R}$ olduğundan 1 elemanı açıkta kalır ve t bir fonksiyon belirtmez.

Örnek5: $g: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 7$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir ?

Her x gerçekte sayı için $2x^3 - 3x^2 + 4x + 7$ ifadesi bir gerçekte sayıdır. Bu durumda $g(x)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ dir.

Örnek6: $f(x) = \frac{x-6}{x+3}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir ?

$f(x) = \frac{x-6}{x+3}$ fonksiyonu rasyonel bir fonksiyondur. Bu tür fonksiyonlar, paydayı sıfır yapan değerler dışında tanımlıdır. O halde $x+3=0$ ise $x=-3$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R} - \{-3\}$ bulunur.

Örnek7: $t(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt[6]{9-x} - \sqrt[3]{\frac{5}{x-8}}$

fonksiyonunu tanımlı yapan tam sayıların toplamı nedir ?

$t(x)$ fonksiyonu kendi içinde iki ayrı fonksiyon içerdiğinden her fonksiyonun tanım kümesi ayrı ayrı incelenir. İki fonksiyonu da sağlayan noktalar $t(x)$ fonksiyonunun tanım kümesidir.

$\sqrt{x-3}$ için $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$

$\sqrt[6]{9-x}$ için $9-x \geq 0 \Rightarrow 9 \geq x$

$\sqrt[3]{\frac{5}{x-8}}$ için $x \neq 8$ olmalıdır. Bu durumda $3 \leq x \leq 9$ ve $x \neq 8$ dir. O halde fonksiyonu tanımlı yapan tamsayılar : 3,4,5,6,7,9 dur.

$3+4+5+6+7+9 = 34$ bulunur.

Örnek8: $f(2a-3) = a^2 - 1 \Rightarrow f(5) = ?$

$2a - 3 = 5 \Rightarrow 2a = 8$ ve $a = 4$ bulunur. a yerine 4 yazarsak :

$$f(2.4 - 3) = 4^2 - 1$$

$$f(5) = 15 \text{ olur.}$$

Örnek10: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(m+2) = 3m + 1$ ise

$$f(3m-1) = ?$$

$m + 2 = a$ dersek $m = a - 2$ bulunur. Yerine yazarsak :

$$f(a - 2 + 2) = 3.(a-2)+1 \Rightarrow f(a) = 3a - 6 + 1$$

$$f(a) = 3a - 5$$

Bu ifadede a yerine $3m-1$ yazarsak :

$$f(3m-1) = 3.(3m-1) - 5$$

$$f(3m-1) = 9m - 3 - 5$$

$$= 9m - 8 \text{ olur.}$$

Örnek9: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x^2+5x) = 2x^2 + 10x + 23$ ise $g(4)=?$

$g(x^2+5x) = 2x^2 + 10x + 23$ ifadesi düzenlenirse $g(x^2+5x) = 2.(x^2 + 5x) + 23$ biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikte x^2+5x yerine t yazılırsa:

$g(t) = 2t + 23$ bulunur. O halde t yerine 4 yazarsak :

$$g(4) = 2.4 + 23 \Rightarrow g(4) = 31 \text{ bulunur.}$$

Örnek11: $t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t(x-1) = x^2 - x + 5$ ise $t(x) = ?$

$x^2 - x + 5$ ifadesini $x-1$ türünden yazmak için $x^2 - x + 5$ ifadesine $x-1$ eklenip çıkartılırsa

$$t(x-1) = x^2 - x + 5 + (x-1) - (x-1)$$

$$t(x-1) = (x^2 - 2x + 1) + (x-1) - 5$$

$t(x-1) = (x-1)^2 + (x+1) - 5$ biçiminde yazılabilir. Burada $x + 1 = a$ dersek :

$t(a) = a^2 + a - 5$ bulunur ve a yerine x yazılırsa:

$$t(x) = x^2 + x - 5 \text{ elde edilir.}$$

Fonksiyon Çeşitleri

İçine Fonksiyon: $f:A \rightarrow B$ fonksiyonunun değer kümesinde boşta eleman kaldığı durumda fonksiyona verilen isimdir. Yani değer kümesinde eşleşmeyen eleman vardır. Fonksiyonun görüntü kümesinin değer kümesine eşit olmadığı durumda da fonksiyon içine fonksiyon olur.

Örten Fonksiyon: $f:A \rightarrow B$ fonksiyonunun tanım kümesindeki tüm elemanların değer kümesindeki tüm elemanlarla eşleşmesi halinde oluşan fonksiyondur. Yani fonksiyonun görüntü kümesinin değer kümesine eşit olduğu durumda fonksiyon örten olur. Buna göre $f:A \rightarrow B$, $f(x)$ verildiğinde $\forall y \in B$ için $y=f(x)$ olacak şekilde $\exists x \in A$ varsa, f fonksiyonuna örten denir.

- Örten olmayan fonksiyon, içine fonksiyondur.

Örnek12: $f:N \rightarrow N$, $f(x) = x + 3$ fonksiyonu örten midir?

I. Yol: $X = 0$ için $f(0) = 0 + 3 = 3$

$X = 1$ için $f(1) = 1 + 3 = 4$

$X = 2$ için $f(2) = 2 + 3 = 5$

Bu durumda fonksiyonun görüntü kümesi $f(N) = \{1, 2, 3, \dots\}$ fonksiyonunun değer kümesine eşit olmadığından f örten fonksiyon değildir. Değer kümesinde eşleşmeyen eleman bulunduğundan bu fonksiyon örten değil içine fonksiyondur.

II. Yol: $\forall y \in N$ için $y = f(x)$ olacak şekilde $\exists x \in N$ olup olmadığı incelenir.

$y = x + 1$ ($x, y \in N$) $\Rightarrow x = y - 1$,

$x = y - 1 \geq 0$, $y \geq 1$ olduğundan $y = 0$ elemanı ile eşleşen bir x elemanı olmadığından f fonksiyonu örten değildir.

Örnek13: $f:Z \rightarrow Z$, $f(x) = x + 3$ fonksiyonu örten midir?

Verilen fonksiyonda $f(Z) = Z$ olduğu gösterilmelidir.

.....

$X = -2$ için $f(-2) = -2 + 3 = -1$

$X = -1$ için $f(-1) = -1 + 3 = 2$

$X = 0$ için $f(0) = 0 + 3 = 3$

$X = 1$ için $f(1) = 1 + 3 = 4$

.....

Bu durumda fonksiyonun görüntü kümesi $f(Z) = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ bulunur.

Fonksiyonun değer kümesi, görüntü kümesine eşit olduğundan f fonksiyonu örten dir.

Örnek14: $f:Z \rightarrow Z$, $f(x) = 2x - 1$ fonksiyonu örten veya içine midir ?

$\forall x \in Z$ için $2x-1$ daima tek sayıdır. Bu durumda değer kümesindeki çift sayılar açıkta kalır. Dolayısıyla f örten değil içine fonksiyondur.

Bire Bir Fonksiyon: $f:A \rightarrow B$ fonksiyonunun tanım kümesindeki elemanların her biri, değer kümesinde bulunan farklı bir elemanla eşleşiyorsa, fonksiyon bire birdir. Bu durumda

$\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ veya

$\forall x_1, x_2 \in A$ için $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ oluyorsa, f fonksiyonu bire birdir.

Örnek15: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 5$ fonksiyonu bire bir midir ?

$\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ olduğu gösterilmelidir.

$\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 \neq x_2$ ise her iki taraf da 4 ile çarpılır ve her iki tarafa 5 eklenirse $4x_1 + 3 \neq 4x_2 + 3$ eşitsizliği elde edilir. Buradan $f(x_1) \neq f(x_2)$ olur. Tanım kümesindeki farklı elemanlar, değer kümesinde bulunan farklı elemanlarla eşleşmiş olur. Bu durumda f fonksiyonu birebirdir.

Örnek16: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu bire bir midir ?

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ olmalıdır.

$f(x_1) = f(x_2)$ ise $(x_1)^2 = (x_2)^2$ dir. İki tarafın da karekökü alınırsa $|x_1| = |x_2|$ elde edilir. Bu eşitlikten $x_1 = x_2$ veya $x_1 = -x_2$ olur. Buradan daima $x_1 = x_2$ eşitliğinin sağlanmadığı görülür. O halde f fonksiyonu birebir değildir.

Birim (Özdeş) Fonksiyon: $f:A \rightarrow B$ fonksiyonunun tanım kümesindeki her elemanı kendisine eşleyen fonksiyona denir. Birim fonksiyon $f(x)=I(x)=x$ olarak gösterilir.

Örnek17: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (k-2)x^2 + (m+3)x + n-5$ fonksiyonu birim fonksiyondur. Buna göre k, m ve n yi bulunuz.

$f(x)$ birim fonksiyon ise $f(x)=x$ biçimindedir. O halde

$f(x) = (k-2)x^2 + (m+3)x + n-5$ ifadesinde $(k-2)$ ve $n-5$ sıfıra, $(m+3)$ ise 1'e eşit olmalıdır.

$$k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$$

$$m + 3 = 1 \Rightarrow m = -2$$

$$n - 5 = 0 \Rightarrow n = 5 \text{ bulunur.}$$

Örnek18: g birim fonksiyon olmak üzere $g(2x-1) + g(3) = x + g(7) \Rightarrow x = ?$

g birim fonksiyon ise $g(x)=x$ olur.

$g(2x-1) + g(3) = x + g(7)$ ise

$$2x - 1 + 3 = x + 7 \text{ olur.}$$

$$x = 5 \text{ bulunur.}$$

Sabit Fonksiyon: $f:A \rightarrow B$ fonksiyonunun tanım kümesindeki tüm elemanlar değer kümesinde bulunan yalnız bir elemanla eşleşiyorsa, f fonksiyonuna sabit fonksiyon denir. $c \in B$ olmak üzere $f(x)=c$ şeklinde gösterilir. Diğer bir deyişle, görüntü kümesindeki eleman sayısı 1 olan fonksiyondur.

Örnek19: $f:R \rightarrow R$,
 $f(x) = (t-3)x^2 + (m-5)x + t.m - 4$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise $f(8008+t-m)=?$

$f(x)$ sabit fonksiyon ise $f(x)=c$ dir. O halde fonksiyonda $(t-3)$ ve $(m-5)$ ifadelerinin sıfıra eşit olmaları gerekir.

$$t - 3 = 0 \Rightarrow t = 3 \text{ ve}$$

$m - 5 = 0 \Rightarrow m = 5$ olur. Bu durumda elimizde sadece $f(x)= t.m - 4$ kalır.

$f(x)= 3.5 - 4 = 11$ bulunur. Bu durumda $f(8008+t-m) = 11$ olur.

Not: Tanımlı olunan durumlarda
 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ sabit fonksiyon ise $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ olur.

Örnek20: $x \neq 2$ olmak üzere $f(x)=\frac{mx+2}{2x-4}$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise $m + f(2013) = ?$

$f(x) = \frac{mx+2}{2x-4}$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise

$\frac{m}{2} = \frac{2}{-4}$ ifadesinde içler dışlar çarpımı yapılırsa $m = -1$ bulunur. m değeri fonksiyonda yerine yazılırsa

$$f(x) = \frac{-x+2}{2x-4} = \frac{-x+2}{-2 \cdot (-x+2)} = \frac{-1}{2} \text{ olur.}$$

O halde $m + f(2013) = -1 + \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-3}{2}$ elde edilir.

Örnek21: $f(-2) \cdot f(0) \cdot f(6) = -64$ ise $f(1071) = ?$ (f sabit fonksiyondur)

f sabit fonksiyon ise $f(x) = c$ biçimindedir. O halde

$$f(-2) \cdot f(0) \cdot f(6) = c \cdot c \cdot c = -64$$

$c^3 = -64 \Rightarrow c = -4$ bulunur. Bu durumda $f(1071) = -4$ tür.

Doğrusal Fonksiyon: $f:R \rightarrow R$, $a, b \in R$ olmak üzere $f(x)=ax+b$ biçimindeki fonksiyonlara denir. Bu fonksiyonların görüntü kümeler, analitik düzlemde bir doğru belirtir.

Örnek22: $f:R \rightarrow R$ fonksiyonu doğrusaldır. $f(3) = 13$, $f(5) = 23 \Rightarrow f(8) = ?$

f doğrusal fonksiyon ise $f(x) = ax+b$ biçimindedir. O halde

$$f(3) = 3a + b = 13$$

$f(5) = 5a + b = 23$ denklemleri elde edilir. Birinci denklemi eksi ile çarpıp ikinci denklem ile taraf tarafa toplarsak

$2a = 10$ ve $a = 5$ elde edilir. a yerine 5 yazarsak $b = -2$ bulunur. buradan $f(x) = 5x-2$ elde edilir.

$$f(8) = 5 \cdot 8 - 2 = 38 \text{ bulunur.}$$

Örnek23: $g(x)$ doğrusal fonksiyon olmak üzere $g(2x-1) + g(x+2) = 6x+5$ ise $g(1) + 2.g(3) + g(4) = ?$

$$x = 1 \text{ için } g(2x-1) + g(x+2) = g(1) + g(3) = 11$$

$$x = 2 \text{ için } g(2x-1) + g(x+2) = g(3) + g(4) = 17 \text{ eşitlikleri bulunur.}$$

Eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$g(1) + 2.g(3) + g(4) = 28 \text{ bulunur.}$$

Örnek24: f doğrusal fonksiyon olmak üzere $f(c-3) + f(c+2) = 6c + 7 \Rightarrow f(7) = ?$

$$f(c-3) + f(c+2) = 6c + 7 \text{ ifadesinde}$$

$f(c) = ax+b$ biçimindedir. (x yerine c yazılmış o yüzden $ac+b$ diyeceğim.)

$$f(c-3) = a.(c-3) + b$$

$f(c+2) = a.(c+2) + b$ ifadelerini taraf tarafa toplarsak :

$$f(c-3) + f(c+2) = a.(c-3) + b + a.(c+2) + b = 6c + 7$$

$$ac - 3a + b + ac + 2a + b = 6c + 7$$

$$2ac + (-a + 2b) = 6c + 7 \text{ ise}$$

$$2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$-a + 2b = 7 \Rightarrow -3 + 2b = 7$$

$$2b = 10 \Rightarrow b = 5 \text{ bulunur. o halde}$$

$$f(c) = 3c + 5 \text{ olur ve } f(7) = 3.7+5 = 26 \text{ bulunur.}$$

Parçalı Tanımlı Fonksiyon: Tanım kümesinin alt aralıklarında farklı kurallarla tanımlanan fonksiyondur.

$$f(x) = \begin{cases} t(x), & k \leq x \leq m \\ m(x), & m \leq x \leq n \end{cases}$$

biçiminde yazılır. Buradaki k, m, n noktaları kritik noktalardır.

$$\text{Örnek25: } f(t) = \begin{cases} t + 3, & t < -1 \text{ ise} \\ t - 1, & -1 \leq t \leq 1 \text{ ise} \\ 2t - 2, & t > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(-2) + f(1) + f(2) = ?$$

$f(t)$ parçalı fonksiyonunda $-2 < -1$ olduğundan ilk aralık kullanılır. Yani

$$f(-2) = -2 + 3 = 1$$

$$-1 \leq 1 \text{ olduğundan } f(1) = 1 - 1 = 0$$

$$2 > 1 \text{ olduğundan } f(2) = 2.2 - 2 = 2 \text{ bulunur. O halde}$$

$$f(-2) + f(1) + f(2) = 1 + 0 + 2 = 3 \text{ olur.}$$

$$\text{Örnek26: } f(x) = \begin{cases} t(x), & 0 \leq x \text{ ise} \\ m(x), & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\text{fonksiyonunda } f(1) + f(-1) = 6 \Rightarrow m(9) = ?$$

(t birim fonksiyon, m sabit fonksiyondur.)

$$1 \geq 0 \text{ olduğundan } f(1) = t(1) = 1$$

$$-1 < 0 \text{ olduğundan } f(-1) = m(-1) = c \text{ bulunur.}$$

$$f(1) + f(-1) = 6 \Rightarrow 1 + c = 6 \text{ ve } c = 5 \text{ elde edilir.}$$

$$m \text{ sabit fonksiyon olduğundan } m(9) = 5 \text{ bulunur.}$$

Çift Fonksiyon: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(-x) = f(x)$ ise f fonksiyonu çifttir.

Tek Fonksiyon: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(-x) = -f(x)$ ise f fonksiyonu tektir.

Örnek27: Aşağıdakilerden hangileri tek, hangileri çifttir ?

a) $f_1(x) = 5x^2$

$f_1(x) = 5x^2$ fonksiyonunda x yerine $-x$ yazılırsa

$$f_1(-x) = 5(-x)^2$$

$$f_1(-x) = 5x^2$$

olduğundan $f_1(x)$ fonksiyonu çift bir fonksiyondur.

b) $f_2(x) = 6x^3$

$f_2(x) = 6x^3$ fonksiyonunda x yerine $-x$ yazılırsa

$$f_2(-x) = 6(-x)^3$$

$$f_2(-x) = 6x^3 = -f_2(x)$$

olduğundan $f_2(x)$ fonksiyonu tek bir fonksiyondur.

c) $f_3(x) = x^3 + 6x$

$f_3(x) = x^3 + 6x$ fonksiyonunda x yerine $-x$ yazılırsa

$$f_3(-x) = (-x)^3 + 6(-x) = -(x^3 + 6x) = -f_3(x)$$

olduğundan $f_3(x)$ fonksiyonu tek bir fonksiyondur.

d) $f_4(x) = x^6 + 2x^2 + 7$

$f_4(x) = x^6 + 2x^2 + 7$ fonksiyonunda x yerine $-x$ yazılırsa

$$f_4(-x) = (-x)^6 + 2(-x)^2 + 7 = x^6 + 2x^2 + 7 = f_4(x)$$

olduğundan $f_4(x)$ çift fonksiyondur.

Örnek28: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f ve h tek fonksiyon olmak üzere $h(x) = 2x^3 + 4.f(x)$, $f(-3) = -5$ olduğuna göre $h(3) = ?$

Fonksiyonlar tek olduğundan $f(-3) = -f(3)$ olur. Buna göre $f(-3) = -f(3) = -(-5) = 5$ bulunur.

$$X=3 \text{ için } h(3) = 2.(3)^3 + 4.f(3)$$

$$= 2. 27 + 4. 5 = 54 + 20$$

$$= 74 \text{ olur.}$$

Eşit Fonksiyonlar: $f: A \rightarrow B$, $g: A \rightarrow B$ fonksiyonları için $\forall x \in A$ için $f(x) = g(x)$ ise f ve g fonksiyonları eşit fonksiyondur denir. $f=g$ biçiminde gösterilir.

Örnek29: $X = \{0, 2\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f: X \rightarrow Y$, $f(x) = x^2 + 1$, $g: X \rightarrow Y$, $g(x) = 2x + 1$ fonksiyonları verilsin. f ve g eşit fonksiyonlar mıdır ?

X kümesindeki elemanların f ve g altındaki görüntülerinin eşit olup olmadıkları incelenmelidir.

$$x=0 \text{ için } f(0) = 0^2 + 1 = 1, g(0) = 2.0 + 1 = 1$$

$$x=2 \text{ için } f(2) = 2^2 + 1 = 5, g(2) = 2.2 + 1 = 5$$

bulunur.

$f(X) = g(X) = \{1, 5\}$ olduğundan f ve g eşit fonksiyonlardır.

Fonksiyonlarda Cebirsel İşlemler

$f:A \rightarrow R$, $g:B \rightarrow R$ ve $A \cap B \neq \emptyset$ olsun.

- $f+g: (A \cap B) \rightarrow R$, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- $f-g: (A \cap B) \rightarrow R$, $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
- $f.g: (A \cap B) \rightarrow R$, $(f.g)(x)=f(x).g(x)$
- $\frac{f}{g}: (A \cap B) \rightarrow R$, $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$,
 $g(x) \neq 0$
- $k \in R$, $(k.f)(x)=k.f(x)$

Örnek30: $f,g:R \rightarrow R$, $f(x) = x^2 + 2x + 2$,
 $g(x) = x + 5$ olmak üzere $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$,
 $(f.g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$ fonksiyonlarını bulunuz.

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
 $= x^2 + 2x + 2 + x + 5$
 $= x^2 + 3x + 7$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
 $= x^2 + 2x + 2 - (x+5)$
 $= x^2 + 2x + 2 - x - 5 = x^2 + x - 3$
- $(f.g)(x) = f(x).g(x) = (x^2 + 2x + 2).(x+5)$
 $= x^3 + 5x^2 + 2x^3 + 10x + 2x + 10$
 $= 3x^3 + 5x^2 + 12x + 10$
- $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+5}$

Örnek31: $f,h: R \rightarrow R$, $f(x) = 2x-1$,
 $h(x) = 1-x^2$ olmak üzere $\frac{2f-3h}{f.h}(2) = ?$

$$\frac{2f-3h}{f.h}(2) = \frac{2f(2) - 3h(2)}{f(2).h(2)}$$

$$f(2) = 2.2-1 = 3 \quad h(2) = 1-2^2 = -3$$

$$\begin{aligned} \frac{2f(2) - 3h(2)}{f(2).h(2)} &= \frac{2.3 - 3.(-3)}{3.(-3)} \\ &= \frac{6+9}{-9} = \frac{15}{-9} = \frac{5}{-3} \end{aligned}$$

Örnek32: $f,g:R \rightarrow R$, $(f+g)(x) = x^3 + 2x - 1$,
 $f(x) = 3x$ ise $g(-1) = ?$

I.yol : $(f+g)(x) = x^3 + 2x - 1$ ise

$f(x)+g(x) = x^3 + 2x - 1$ ifadesinde $g(x)$ yalnız bırakılırsa

$$g(x) = x^3 + 2x - 1 - f(x)$$

$$g(x) = x^3 + 2x - 1 - 3x$$

$$g(x) = x^3 - x - 1$$

$$g(-1) = (-1)^3 - (-1) - 1 = -1 + 1 - 1 = -1 \text{ bulunur.}$$

II. Yol : $(f+g)(-1) = f(-1)+g(-1)$ olduğundan

$$(-1)^3 + 2.(-1) - 1 = 3.(-1) + g(-1)$$

$$-1 - 2 - 1 = -3 + g(-1)$$

$$-4 = -3 + g(-1) \Rightarrow g(-1) = -1 \text{ bulunur.}$$

Örnek33: $f = \{(1,3),(-1,2),(0,4),(2,5)\}$,
 $h = \{(-2,1),(-1,4),(3,2),(2,0)\} \Rightarrow$
 $(2f + 3h)(x) = ?$

Ortak tanım kümesi $\{-1,2\}$ dir.

$$(2f + 3h)(x) = 2f(x) + 3h(x)$$

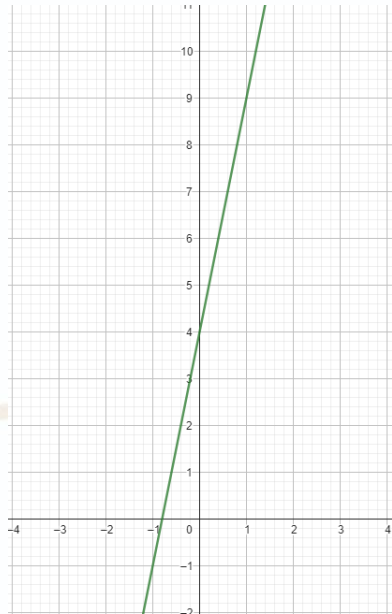
$$\{-1.2.f(-1)+3.h(-1),(2,2.f(2)+3.h(2))\}$$

$$=\{(-1,2.2+3.4),(2,2.5+3.0)\}$$

$$=\{(-1,4+12),(2,10+0)\}$$

$$=\{(-1,16),(2,10)\} \text{ elde edilir.}$$

Örnek34: Bir taksinin açılış fiyatı 4 TL'dir ve her 1 km için 5 TL ücret almaktadır. Taksiye binen bir kişinin 4. Km sonunda ödediği ücret e gidilen mesafe arasındaki ilişkiyi tabloda gösterip grafiğini çiziniz.



Gidilen mesafe	Açılış	1.km	2.km	3.km	4.km
Toplam ücret	4 TL	9TL	13TL	18TL	23TL

Örnek35: Deposunda 40 litre mazot bulunan ve her 100 km de 5L mazot tüketen bir kamyonun deposunda kalan yakıt miktarı ile gittiği yol arasındaki ilişkiyi tabloda gösterip grafiğini çiziniz.

Kalan Yakıt (L)	40	35	30	25	20	15	10	5	0
Gidilen Mesafe (km)	0	100	200	300	400	500	600	700	800

