

Fonksiyonlar

$A \neq B$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ olmak üzere

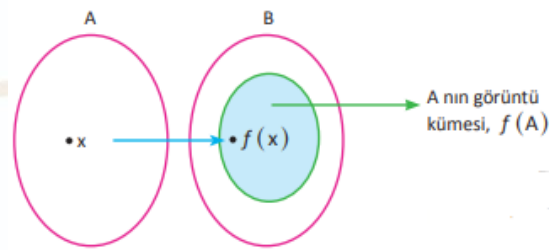
$A \times B = \{(x,y) : x \in A, y \in B\}$ Kartezyen çarpım kümesinin her alt kümesine A dan B ye **bağıntı** denir. A dan B ye tanımlanan bir f bağıntısının fonksiyon olması için:

- 1) A kümesinde eşleşmemiş eleman kalmamalıdır. Yani $\forall x \in A$ için $(x,y) \in f$ olacak şekilde bir $y \in B$ vardır.
- 2) A kümesindeki herhangi bir eleman, B kümesinde yalnız bir elemanla eşleşmelidir. $(x,y_1) \in f$ ve $(x,y_2) \in f$ olduğunda $y_1 = y_2$ oluyorsa F bağıntısına A dan B ye **fonksiyon** denir.

A dan B ye tanımlanan f fonksiyonu $f: A \rightarrow B$ şeklinde gösterilir. $(x,y) \in f \Rightarrow y = f(x)$ şeklinde yazılır. Burada x **bağımsız değişken**, y **bağımlı değişkendir**.

$f: A \rightarrow B$ gösteriminde A kümesi, fonksiyonun **tanım kümesi**, B kümesi fonksiyonun **değer kümesidir**.

A daki elemanların f fonksiyonu ile B deki eşleştiği elemanlardan oluşan kümeye, fonksiyonun **görüntü kümesi** denir ve $f(A)$ ile gösterilir. $f(A) \subset B$ dir.



$A \rightarrow$ Tanım Kümesi

$B \rightarrow$ Değer Kümesi

$f(A) \rightarrow$ Görüntü Kümesi

Örnek1: $X = \{1,2,3\}$ kümesinden $Y = \{a,b,c,d\}$ kümesine tanımlanan aşağıdaki bağıntılardan hangileri fonksiyondur ?

a) $\beta_1 = \{(1,c), (2,d), (3,a)\}$

b) $\beta_2 = \{(1,d), (2,d), (3,d)\}$

c) $\beta_3 = \{(1,c), (3,d)\}$

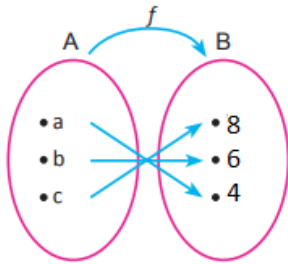
d) $\beta_4 = \{(1,a), (3,c), (3,d), (2,a)\}$

Not: Bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için tanıma kümesinde eşleşmeyen eleman kalmamalıdır ve tanım kümesindeki her eleman, değer kümesindeki yalnızca bir elemanla eşleşebilir.

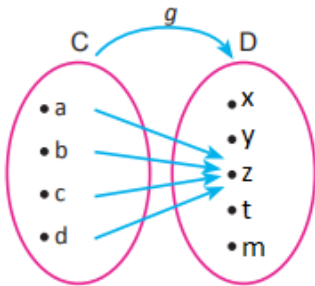
Not: Her fonksiyon bir bağıntıdır fakat her bağıntı bir fonksiyon değildir.

Örnek2: Aşağıdaki şekillerden hangileri fonksiyondur ?

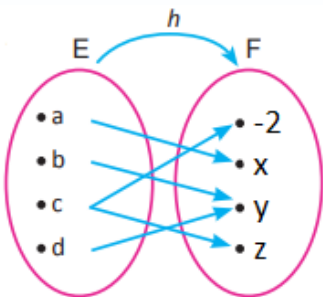
a)



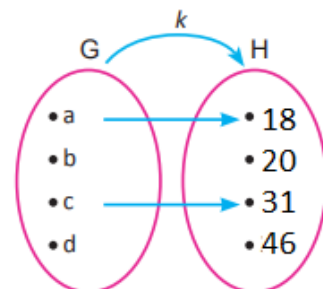
b)



c)



d)



Örnek3: $y = f(x) = x^2 - x + 5$ ise $f(3)$, $f(x+1)$, $f(2x)$, $f(x^2)$ ve $f(m)$ ifadelerini bulunuz.

Örnek4: Aşağıdakilerden hangileri fonksiyondur?

a) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = 2x+5$

b) $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(x) = \frac{5x}{6}$

c) $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $h(x) = x^2$

d) $t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t(x) = \frac{4}{x} - 1$

Örnek5: $g: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 7$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir ?

Örnek6: $f(x) = \frac{x-6}{x+3}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir ?

Örnek10: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(m+2) = 3m + 1$ ise $f(3m-1) = ?$

Örnek7: $t(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt[6]{9-x} - \sqrt[3]{\frac{5}{x-8}}$ fonksiyonunu tanımlı yapan tam sayıların toplamı nedir ?

Örnek11: $t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t(x-1) = x^2 - x + 5$ ise $t(x) = ?$

Örnek8: $f(2a-3) = a^2 - 1 \Rightarrow f(5) = ?$

Örnek9: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x^2+5x) = 2x^2 + 10x + 23$ ise $g(4) = ?$

Fonksiyon Çeşitleri

İçine Fonksiyon: $f: A \rightarrow B$ fonksiyonunun değer kümesinde boşta eleman kaldığı durumda fonksiyona verilen isimdir. Yani değer kümesinde eşleşmeyen eleman vardır. Fonksiyonun görüntü kümesinin değer kümesine eşit olmadığı durumda da fonksiyon içine fonksiyon olur.

Örten Fonksiyon: $f: A \rightarrow B$ fonksiyonunun tanım kümesindeki tüm elemanların değer kümesindeki tüm elemanlarla eşleşmesi halinde oluşan fonksiyondur. Yani fonksiyonun görüntü kümesinin değer kümesine eşit olduğu durumda fonksiyon örten olur. Buna göre $f: A \rightarrow B$, $f(x)$ verildiğinde $\forall y \in B$ için $y = f(x)$ olacak şekilde $\exists x \in A$ varsa, f fonksiyonuna örten denir.

- Örten olmayan fonksiyon, içine fonksiyondur.

Örnek12: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x + 3$ fonksiyonu örten midir?

Örnek15: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 5$ fonksiyonu bire bir midir ?

Örnek13: $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 3$ fonksiyonu örten midir?

Örnek16: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu bire bir midir ?

Örnek14: $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x - 1$ fonksiyonu örten veya içine midir ?

Birim (Özdeş) Fonksiyon: $f: A \rightarrow B$ fonksiyonunun tanım kümesindeki her elemanı kendisine eşleyen fonksiyona denir. Birim fonksiyon $f(x) = I(x) = x$ olarak gösterilir.

Örnek17: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = (k-2)x^2 + (m+3)x + n-5$ fonksiyonu birim fonksiyondur. Buna göre k,m ve n yi bulunuz.

Bire Bir Fonksiyon: $f: A \rightarrow B$ fonksiyonunun tanım kümesindeki elemanların her biri, değer kümesinde bulunan farklı bir elemanla eşleşiyorsa, fonksiyon bire birdir. Bu durumda

$\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ veya

$\forall x_1, x_2 \in A$ için $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ oluyorsa, f fonksiyonu bire birdir.

Örnek18: g birim fonksiyon olmak üzere $g(2x-1) + g(3) = x + g(7) \Rightarrow x = ?$

Sabit Fonksiyon: $f:A \rightarrow B$ fonksiyonunun tanım kümesindeki tüm elemanlar değer kümesinde bulunan yalnız bir elemanla eşleşiyorsa, f fonksiyonuna sabit fonksiyon denir. $c \in B$ olmak üzere $f(x)=c$ şeklinde gösterilir. Diğer bir deyişle, görüntü kümesindeki eleman sayısı 1 olan fonksiyondur.

Örnek19: $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = (t-3)x^2 + (m-5)x + t.m - 4$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise $f(8008+t-m)=?$

Not: Tanımlı olunan durumlarda
 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ sabit fonksiyon ise $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ olur.

Örnek20: $x \neq 2$ olmak üzere $f(x) = \frac{mx+2}{2x-4}$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise
 $m + f(2013) = ?$

Örnek21: $f(-2) \cdot f(0) \cdot f(6) = -64$ ise
 $f(1071) = ?$ (f sabit fonksiyondur)

Doğrusal Fonksiyon: $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)=ax+b$ biçimindeki fonksiyonlara denir. Bu fonksiyonların görüntü kümeler, analitik düzlemde bir doğru belirtir.

Örnek22: $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu doğrusaldır.
 $f(3) = 13$, $f(5) = 23 \Rightarrow f(8) = ?$

Örnek23: $g(x)$ doğrusal fonksiyon olmak üzere $g(2x-1) + g(x+2) = 6x+5$ ise
 $g(1) + 2 \cdot g(3) + g(4) = ?$

Örnek24: f doğrusal fonksiyon olmak üzere $f(c-3) + f(c+2) = 6c+7 \Rightarrow f(7) = ?$

Parçalı Tanımlı Fonksiyon: Tanım
kümesinin alt aralıklarında farklı kurallarla tanımlanan fonksiyondur.

$$f(x) = \begin{cases} t(x), k \leq x \leq m \\ m(x), m \leq x \leq n \end{cases}$$

biçiminde yazılır. Buradaki k,m,n noktaları kritik noktalardır.

Örnek25: $f(t) = \begin{cases} t + 3, & t < -1 \text{ ise} \\ t - 1, & -1 \leq t \leq 1 \text{ ise} \\ 2t - 2, & t > 1 \text{ ise} \end{cases}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(-2) + f(1) + f(2) = ?$

Örnek26: $f(x) = \begin{cases} t(x), & 0 \leq x \text{ ise} \\ m(x), & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunda $f(1) + f(-1) = 6 \Rightarrow m(9) = ?$

(t birim fonksiyon, m sabit fonksiyondur.)

Çift Fonksiyon: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$ için
 $f(-x) = f(x)$ ise f fonksiyonu çifttir.

Tek Fonksiyon: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$ için
 $f(-x) = -f(x)$ ise f fonksiyonu tektir.

Örnek27: Aşağıdakilerden hangileri tek, hangileri çifttir ?

a) $f_1(x) = 5x^2$

b) $f_2(x) = 6x^3$

c) $f_3(x) = x^3 + 6x$

d) $f_4(x) = x^6 + 2x^2 + 7$

Örnek28: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f$ ve h tek fonksiyon olmak üzere $h(x) = 2x^3 + 4.f(x)$, $f(-3) = -5$ olduğuna göre $h(3) = ?$

Eşit Fonksiyonlar: $f:A \rightarrow B$, $g:A \rightarrow B$
fonksiyonları için $\forall x \in A$ için $f(x)=g(x)$ ise f
ve g fonksiyonları eşit fonksiyondur denir.
 $f=g$ biçiminde gösterilir.

Örnek29: $X = \{0,2\}$, $Y = \{1,2,3,4,5\}$, $f:X \rightarrow Y$,
 $f(x)=x^2 + 1$, $g:X \rightarrow Y$, $g(x) = 2x+1$
fonksiyonları verilsin. f ve g eşit
fonksiyonlar mıdır ?

Örnek31: $f,h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x-1$,
 $h(x) = 1-x^2$ olmak üzere $\frac{2f-3h}{f \cdot h}(2) = ?$

Fonksiyonlarda Cebirsel İşlemler

$f:A \rightarrow \mathbb{R}$, $g:B \rightarrow \mathbb{R}$ ve $A \cap B \neq \emptyset$ olsun.

- $f+g: (A \cap B) \rightarrow \mathbb{R}$, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- $f-g: (A \cap B) \rightarrow \mathbb{R}$, $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
- $f \cdot g: (A \cap B) \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f}{g}: (A \cap B) \rightarrow \mathbb{R}$, $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$,
 $g(x) \neq 0$
- $k \in \mathbb{R}$, $(k \cdot f)(x)=k \cdot f(x)$

Örnek30: $f,g:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 2$,
 $g(x) = x + 5$ olmak üzere $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$,
 $(f \cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$ fonksiyonlarını bulunuz.

Örnek32: $f,g:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = x^3 + 2x - 1$,
 $f(x) = 3x$ ise $g(-1) = ?$

Örnek33: $f = \{(1,3),(-1,2),(0,4),(2,5)\}$,
 $h = \{(-2,1),(-1,4),(3,2),(2,0)\} \Rightarrow$
 $(2f + 3h)(x) = ?$

Örnek34: Bir taksinin açılış fiyatı 4 TL'dir ve her 1 km için 5 TL ücret almaktadır. Taksiye binen bir kişinin 4. Km sonunda ödediği ücret e gidilen mesafe arasındaki ilişkiyi tabloda gösterip grafiğini çiziniz.

Örnek35: Deposunda 40 litre mazot bulunan ve her 100 km de 5L mazot tüketen bir kamyonun deposunda kalan yakıt miktarı ile gittiği yol arasındaki ilişkiyi tabloda gösterip grafiğini çiziniz.