

Fonksiyonlarda Grafik Çizimi

$f:A \rightarrow B$ fonksiyonunun noktalarının koordinat sisteminde gösterilmesiyle oluşan noktalar kümesine, f fonksiyonunun grafiği denir. Tanım kümesinin elemanları x ekseninde, değer kümesinin elemanları y ekseninde gösterilir.

Örnek1: $I:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $I(x)=x$ birim fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

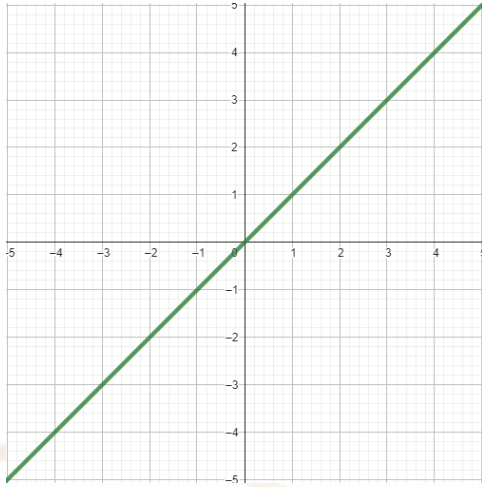
Birim fonksiyonu sağlayan bazı noktaları gösterelim :

$$x = -2 \Rightarrow I(x) = -2$$

$$x = -1 \Rightarrow I(x) = -1$$

$$x = 0 \Rightarrow I(x) = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow I(x) = 1$$



Örnek2: $g:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x)=3x+9$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

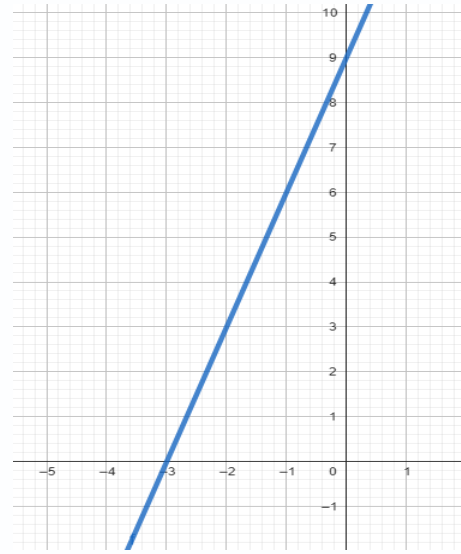
$$x = -3 \Rightarrow g(x) = 3 \cdot (-3) + 9 = 0$$

$$x = -2 \Rightarrow g(x) = 3 \cdot (-2) + 9 = -6 + 9 = 3$$

$$x = -1 \Rightarrow g(x) = 3 \cdot (-1) + 9 = 6$$

$$x = 0 \Rightarrow g(x) = 3 \cdot 0 + 9 = 9$$

$$x = 1 \Rightarrow g(x) = 3 \cdot 1 + 9 = 12 \text{ olur.}$$



Not: Tek fonksiyonların grafikleri orijine, çift fonksiyonların grafikleri ise y eksenine göre simetriktr.

Örnek3: $f(x) = \begin{cases} x, & x < -1 \text{ ise} \\ x + 2, & -1 \leq x < 2 \text{ ise} \\ -x + 2, & 2 \leq x \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Önce $(-\infty, -1)$ aralığında $y=x$ grafiği çizilir

$[-1, 2)$ aralığında $y = x + 2$ doğrusunun grafiği çizilir.

$$x = -1 \text{ için } y = -1 + 2 = 1$$

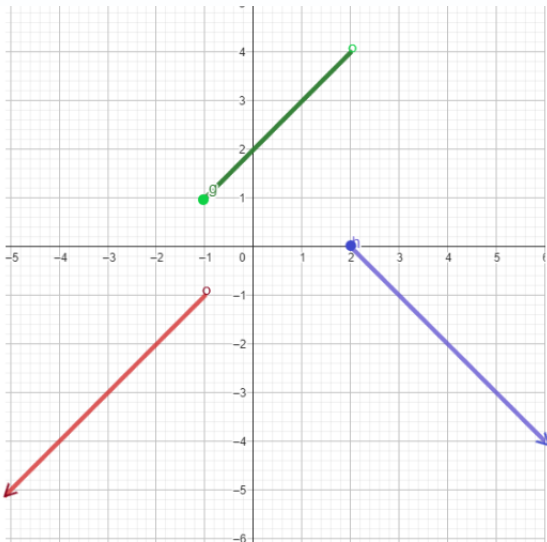
$$x = 0 \text{ için } y = 0 + 2 = 2$$

$$x = 1 \text{ için } y = 1 + 2 = 3$$

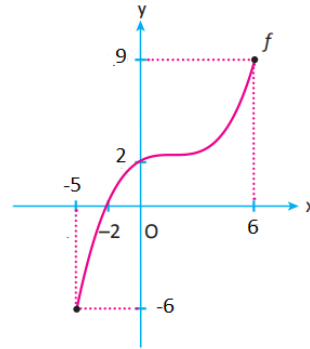
$[2, \infty)$ aralığında $y = -x + 2$ doğrusunun grafiği çizilir.

$$x = 2 \text{ için } y = -2 + 2 = 0$$

$$x = 3 \text{ için } y = -3 + 2 = -1 \dots\dots\dots$$



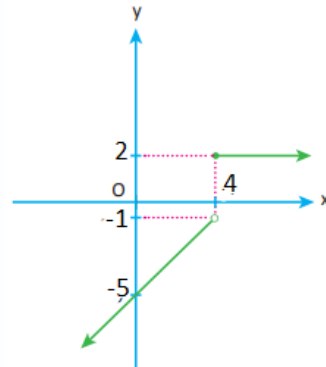
Örnek4: Grafiği verilen fonksiyonun tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.



Grafik üzerindeki her noktadan y eksenine çekilen paralel doğruların x ekseninde kestiği noktalar fonksiyonun tanım kümesinin elemanıdır. Bu yüzden fonksiyonun tanım kümesi $[-5, 6]$ olur.

Grafik üzerindeki her noktadan x eksenine çekilen doğruların y ekseninde kestiği noktalar da fonksiyonun görüntü kümesinin elemanıdır. Bu yüzden görüntü kümesi $[-6, 9]$ dur.

Örnek5: Grafiği verilen fonksiyonun tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.



Grafik üzerindeki her noktadan y eksenine paralel çizilen doğruların x ekseninde kestiği noktalar tanım kümesidir. Bu yüzden tanım kümesi $\mathbb{R}$ olur.

Grafik üzerindeki her noktadan x eksenine paralel çizilen doğruların y ekseninde kestiği noktalar ise fonksiyonun görüntü kümesi olur. Bu yüzden görüntü kümesi $(-\infty, -1) \cup \{2\}$ olur.

Örnek6: $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 4x + 2$ ve $A = [-2, 1]$
 $\Rightarrow h(A) = ?$

I. Yol: $x \in [-2, 1]$ ise $-2 \leq x \leq 1$

$$-8 \leq 4x \leq 4 \Rightarrow -6 \leq 4x + 2 \leq 6$$

$-6 \leq h(x) \leq 6$ bulunur. O halde $h(A) = [-6, 6]$ olur.

II. Yol: Fonksiyonun grafiği çizilerek de çözülebilir. Çizilen grafikte A kümesinin uç noktalarında fonksiyonun görüntüsü alınır.

$$h(-2) = 4 \cdot (-2) + 2 = -8 + 2 = -6$$

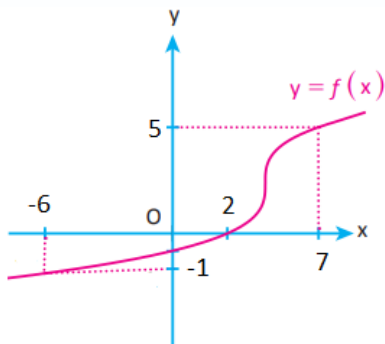
$$h(1) = 4 \cdot 1 + 2 = 4 + 2 = 6$$

Bulunan görüntüler arasındaki aralık, istenen kümenin görüntü kümesidir.

$$h(A) = [-6, 6] \text{ olur.}$$

- $f: A \rightarrow B$, $y = f(x)$ fonksiyonu için x in f altındaki görüntüsü y , y nin **ters görüntüsü** x tir.

Örnek7: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunda $[-1, 5]$ aralığının ters görüntüsü nedir ?



Grafiğe göre $f(7) = 5$ ve $f(-6) = -1$ bulunur. o halde fonksiyonun görüntü kümesinde -1 elemanının ters görüntüsü -6 ;

5 elemanının ters görüntüsü 7 olur. Bu durumda $[-1, 5]$ aralığının f fonksiyonu altındaki ters görüntü kümesi $[-6, 7]$ aralığı olarak bulunur.

Örnek8: $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 1 + x^3$ olmak üzere $y = h(x)$ fonksiyonunun $[-26, 65]$ aralığındaki ters görüntüsü nedir ?

$$h(x) \in [-26, 65] \text{ ise } -26 \leq h(x) \leq 65$$

$$-26 \leq 1 + x^3 \leq 65$$

$$-26 - 1 \leq 1 + x^3 - 1 \leq 65 - 1$$

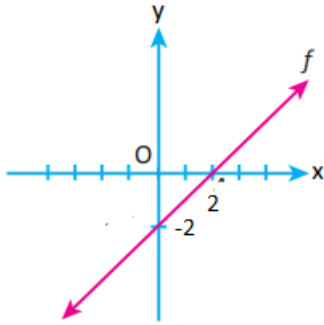
$$-27 \leq x^3 \leq 64$$

$-3 \leq x \leq 4$ bulunur. O halde $[-26, 65]$ aralığındaki ters görüntüsü $A = [-3, 4]$ bulunur.

- Grafiği verilen bağıntının fonksiyon olup olmadığını anlamak için tanım aralığındaki her noktadan y eksenine paralel doğrular çizilir. Çizilen doğrular grafiği yalnız bir noktada kesiyorsa bu bağıntı bir fonksiyondur. Aksi halde değildir. Bu duruma **düşey (dikey) doğru testi** denir.

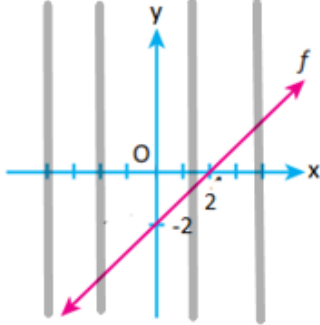
Örnek9: Aşağıdaki grafiklerden hangileri fonksiyondur ?

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

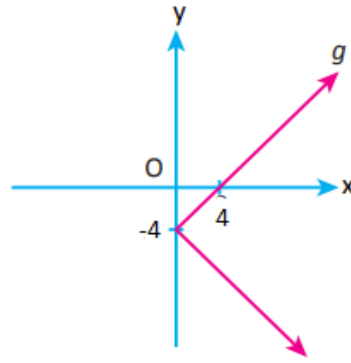


$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanım kümesinin her noktasından Oy eksenine paralel çizgiler çekersek, grafiği yalnız bir noktada keser ve bu bağıntı bir fonksiyondur.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

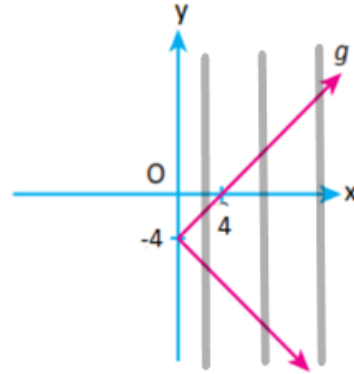


b) $g: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$



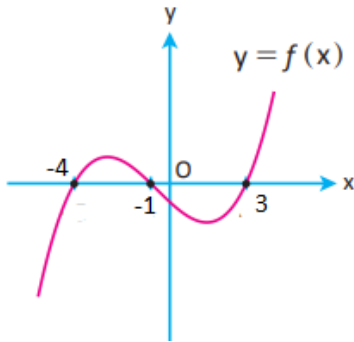
Grafiğin tanım kümesinin herhangi bir noktasından Oy eksenine çizilen paralel doğrulardan en az birisi grafiği iki noktada kestiği için bu bağıntı bir fonksiyon değildir.

b) $g: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$



- Grafiği verilen bir fonksiyonun x eksenini kestiği noktalara, $y=f(x)=0$ denkleminin **kökleri** denir. Tanım kümesinin aralığının görüntüsü x ekseninin üzerindeyse bu aralık, $f(x)>0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi; x ekseninin altında kalıyorsa bu aralık $f(x)<0$ eşitsizliğinin çözüm kümesidir.

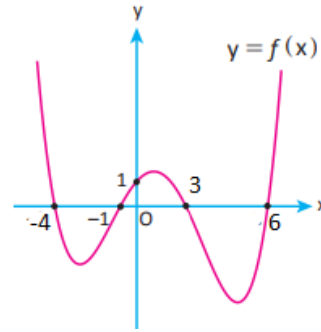
Örnek10: Grafikteki fonksiyonun köklerini bulunuz. ($f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $y = f(x)$)



Fonksiyonun grafiği, x eksenini -4 , -1 ve 3 noktalarında kesmektedir. Bu durumda

$f(-4) = f(-1) = f(3) = 0$ bulunur. O halde $f(x) = 0$ denkleminin kökleri, -4 , -1 ve 3 tür.

Örnek11: Grafikte $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiştir. $y=f(x)$ fonksiyonunda $f(x-2)=0$ denkleminin çözüm kümesi nedir ?



Fonksiyonun grafiği x eksenini -4 , -1 , 3 ve 6 noktalarında kesmektedir. Bu durumda

$f(-4) = f(-1) = f(3) = f(6) = 0$ olur. O halde

$f(x-2) = 0$ denkleminin kökleri

$x - 2 = -4$ ise $x = -2$

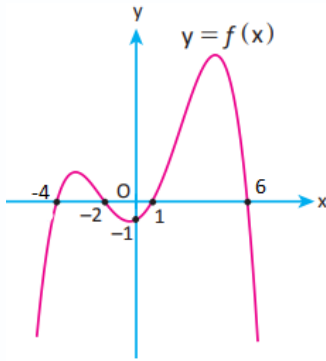
$x - 2 = -1$ ise $x = 1$

$x - 2 = 3$ ise $x = 5$

$x - 2 = 6$ ise $x = 8$ olur.

$f(x-2) = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\{-2, 1, 5, 8\}$ olur.

Örnek12: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunda $f(x) \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayı değerlerinin toplamı nedir ?



$f(x) \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan değerler, grafiğin x ekseninin üzerinde kaldığı aralıklardadır.

$f(x) \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $[-4, -2] \cup [0, 6]$ olur. Bu kümedeki tam sayıların toplamı :

$$-4 - 3 - 2 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 12 \text{ olur.}$$

Örnek13: Sinaner Holding'in zamana bağlı (x yıl) gelir fonksiyonu $g(x)$, gider fonksiyonu $h(x)$ olmak üzere $0 \leq x \leq 8$ için $g(x) = x+2$, $h(x) = \frac{3x}{4} + 3$ olmak üzere

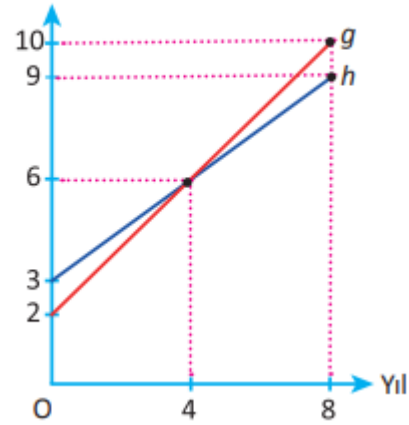
$g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz ve gelir ile giderin hangi yılda eşit olduğunu bulunuz.

$$x = 0 \text{ ise } g(x) = 2 , h(x) = 3$$

$$x = -2 \text{ ise } g(x) = 0$$

$$x = -4 \text{ ise } h(x) = 0 \text{ olur.}$$

Gelir-gider (1000 TL)



Gelir ve giderin eşit olduğu x değer, grafikte görüldüğü üzere iki doğrunun kesişme noktasıdır. Bu nokta $h(x)=g(x)$ denkleminin çözüm kümesidir.

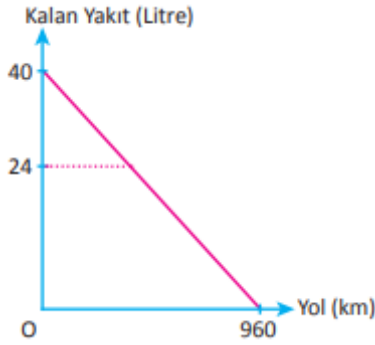
$$\frac{3x}{4} + 3 = x + 2$$

$$\frac{3x}{4} - x = 2 - 3$$

$\frac{-x}{4} = -1 \Rightarrow x = 4$ bulunur. O halde holdingin 4. Senedeki gelir ve gideri birbirine eşit olur.

Örnek14: Bir araç 960 km yolu 40 litre benzin yakarak gidiyorsa, bu durumu gösteren grafiği çiziniz ve depoda 24 litre yakıt kaldığı zaman aracın kaç km yol gittiğini bulunuz.

40 litre yakıtı 960 kilometrede bitiriyorsa grafik aşağıdaki şekilde olur.

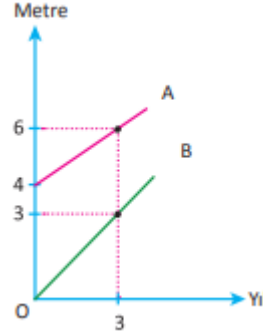


Grafiğe göre aracın tükettiği yakıt ile gittiği yol arasında orantı kurulduğunda 40 litre yakıt ile 960 km yol gidiyorsa (40-24) litre yakıt ile kaç km yol gideceği bulunur.

$$\frac{16L}{40L} = \frac{x \text{ km}}{960 \text{ km}} \text{ ise } 40 \cdot x = 16 \cdot 960$$

$X = 384 \text{ km}$ yol gider.

Örnek15: A ve B ağaçlarının zamana bağlı boylarındaki değişim verilmiştir. Kaç sene sonra A ağacının boyu B ağacının boyunun $\frac{3}{4}$ ü kadar olur ?



A ağacının fonksiyonunu f , B ağacının boyunu g fonksiyonları ile gösterelim.

$$x = 0 \text{ ise } f(x) = 4 , g(x) = 0$$

$$x = 3 \text{ ise } f(x) = 6 , g(x) = 3 \text{ olur.}$$

Bu iki ağacın boylarındaki değişimi gösteren grafikler doğrusal olduğundan

$$f(x) = ax+b$$

$g(x) = mx+n$ biçimindedir. O halde

$$f(0) = b = 4$$

$$f(3) = 3a+b = 6 \Rightarrow 3a+4 = 6 \text{ ve } a = \frac{2}{3} \text{ bulunur. Bu durumda } f(x) = \frac{2}{3}x + 4 \text{ bulunur.}$$

$$g(0) = n = 0$$

$$g(3) = 3m + n = 3 \Rightarrow m = 1 \text{ olur. bu durumda } g(x) = x \text{ olur.}$$

$$\text{Buna göre } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3}{4} \text{ oranından}$$

$$\frac{\frac{2}{3}x+4}{x} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{8x}{3} + 16 = 3x$$

$$16 = 3x - \frac{8x}{3} \Rightarrow 48 = x \text{ bulunur.}$$

Yani 48 sene sonra boylarının oranı $\frac{3}{4}$ olur.