

Olasılık

- Önceden sonucu bilinmeyen olayların gerçekleşme durumuna ilişkin veri toplama sürecine **deney** denir.
- Bir deney sonucunda karşılaşılabilecek olası bütün durumların her birine **çıktı (örnek nokta)** denir.
- Deney sonucunda elde edilen tüm çıktıların kümesine **örnek uzay (örnekleme uzayı)** denir, E ile gösterilir.

Örnek1: Bir zarın bir kez atılması ve madeni paranın bir kez havaya atılması deneylerindeki örnek uzay ve çıktılarını yazınız.

Deney : Madeni paranın bir kez havaya atılması

Çıktılar: Yazı ve tura

Örnek uzay : $E=\{T,Y\}$

Deney : Zarın bir kez atılması

Çıktılar : 1,2,3,4,5,6

Örnek uzay: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

- n tane madeni paranın havaya atılması deneyinde örnek uzayın eleman sayısı 2^n , n tane zarın havaya atılması deneyinde örnek uzayın eleman sayısı 6^n dir.
- Bir E örnek uzayının her bir alt kümesine **olay** denir.

Örnek2: Bir zarın atılması deneyinde zarın üst yüzeyine gelen sayının çift sayı gelme olayını liste yöntemi ile yazınız.

Zarın atılmasında örnek uzay
 $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ şeklindedir.

Zarın çift sayı gelme olayı ise $\Ç=\{2,4,6\}$ dir.

- Bir E örnek uzayının istenen tüm koşulları sağlayan alt kümesinin dışında kalan elemanlarının kümesine, o **olayın tümleyeni** denir.
- Bir deney sonucunda gerçekleşmesi mümkün olan bütün durumların kümesine **kesin olay** denir. Kesin olayın olasılığı 1 dir.
- Bir deney sonucunda gerçekleşme ihtimali mümkün olmayan olaya **imkansız olay** denir.
- Bir E örnek uzayındaki iki olayın ortak elemanı yoksa ya da iki olayın aynı anda gerçekleşmesi mümkün değilse bu olaylara **ayrık olaylar** denir.
A ve B ayrık olaylar ise $A \cap B = \emptyset$ olur
 $A \cap B \neq \emptyset$ ise A ve B olayları **ayrık değildir**.

Örnek3: Bir çift zarın atılması deneyinde zarların üst yüzlerine gelen sayıların çarpımlarının en çok 3 olma olayı X , eşit olma olayı Y, toplamalarının en az 10 olma olayı Z ise X,Y ve Z olaylarını liste yöntemi ile yazınız ve ayrık olmayanları ve ayrık olanları bulunuz.

Zarların üst yüzlerine gelen sayıların çarpımlarının en çok 3 olma olayı

$$X = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (3,1)\}$$

Zarların üst yüzlerine gelen sayıların eşit olma olayı :

$$Y = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

şeklindedir.

Zarların üst yüzlerine gelen sayılar toplamının en az 10 olma olayı :

$$Z = \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

şeklindedir.

$X \cap Z = \emptyset$ olduğundan X ile Z ayrık olaylardır.

$X \cap Y = \{(1,1)\}$ ve $Y \cap Z = \{(5,5), (6,6)\}$ olduğundan X ile Y ve Y ile Z ayrık olmayan olaylardır.

Örnek4: 5 öğretim görevlisi, 4 araştırma görevlisi arasından rastgele 3 kişilik kadro seçilecektir. Buna göre

a) En az birinin araştırma görevlisi olduğu 3 kişilik kadroyu seçme olayının eleman sayısını bulunuz.

Kadrodan en az bir kişinin araştırma görevlisi olma olayının eleman sayısı :

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{5}{2} + \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{1} + \binom{4}{3} \cdot \binom{5}{0}$$

$$= 4 \cdot 10 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 40 + 30 + 4 = 74 \text{ olur.}$$

b) İkisinin araştırma görevlisi, birinin öğretim görevlisi olduğu 3 kişilik kadroyu seçme olayının eleman sayısını bulunuz.

İkisinin araştırma görevlisi birinin öğretim görevlisi olma olayının eleman sayısı :

4 araştırma görevlisi arasından 2 araştırma görevlisinin seçimi $\binom{4}{2}$

5 öğretim görevlisi arasından 1 öğretim görevlisinin seçimi

$\binom{5}{1}$ farklı şekilde yapılabilir. Saymanın çarpma kuralı gereğince ikisi araştırma görevlisi, biri öğretim görevlisi olan sağlık ekibi seçme olayının eleman sayısı :

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{1} = 6 \cdot 5 = 30 \text{ olur.}$$

- $A \subseteq E$ ve $B \subseteq E$ olmak üzere A olayının olasılığı $P(A)$, B olayının olasılığı $P(B)$ şeklinde gösterilir.
- $0 \leq P(A) \leq 1$ olur.
- $P(E) = 1$ ve $P(\emptyset) = 0$ olur.
- Bir olayın gerçekleşmeme olasılığı ile gerçekleşme olasılığı toplam 1 olur. Yani:
 $P(A) + P(A') = 1$
- $A \subseteq B$ ise $P(A) \leq P(B)$ olur.

Örnek5: E örnek uzay, $A \subseteq E$ ve $P(A) = \frac{1}{4}$ olduğuna göre $P(A') = ?$

Bir olayın gerçekleşme olasılığı ile gerçekleşmeme olasılığı toplamı 1 dir.

$P(A) + P(A') = 1$ özelliğinden

$$\frac{1}{4} + P(A') = 1$$

$$P(A') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ bulunur.}$$

- Bir olaya ait sonlu örnek uzay $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun. Bu örnek uzayın her bir elemanının olasılıkları eşit yani $P(e_1) = P(e_2) = \dots = P(e_n)$ ise bu E örnek uzayında **eş olumlu örnek uzay** denir. $A \subseteq E$ olmak üzere:

$$P(A) = \frac{\text{istenen durumların sayısı}}{\text{tüm durumların sayısı}} = \frac{s(A)}{s(E)}$$

olur.

Örnek6: Bir torbada 4 kahverengi 5 mor bilye bulunmaktadır. Torbadan rastgele seçilen bir bilyenin mor olma olasılığını bulunuz.

Örnek uzayın eleman sayısı $s(E) = 4 + 5 = 9$ olur. Çekilen bilyenin mor olma olayı M olsun. O halde $s(M) = 5$ olur. Bu durumda M olayının gerçekleşme olasılığı :

$$P(M) = \frac{s(M)}{s(E)} = \frac{5}{9} \text{ bulunur.}$$

Örnek7: Hilesiz 3 madeni paranın havaya atılması deneyinde birinin yazı ikisinin tura gelme olasılığını bulunuz.

Üç madeni paranın havaya atılması deneyinde örnek uzay $E = \{(Y, Y, Y), (Y, Y, T), (Y, T, Y), (T, Y, Y), (T, T, Y), (Y, T, T), (T, Y, T), (T, T, T)\}$ olup $s(E) = 8 = 2^3$ biçimindedir.

Birinin yazı ikisinin tura gelme olayı B ise $B = \{(T, T, Y), (Y, T, T), (T, Y, T)\}$ biçimindedir. O halde

$$P(B) = \frac{s(B)}{s(E)} = \frac{3}{8} \text{ olur.}$$

Örnek8: Birbirine paralel olan iki doğrudan birinin üzerinde ardışık 3 nokta, diğerinin üzerinde ardışık 4 nokta bulunmaktadır. Bu doğruların üzerinde bulunan 7 noktadan rastgele seçilen 3 noktanın üçgen oluşturma olasılığını bulunuz.

Seçilen üç nokta ile üçgen oluşturulabilmesi için doğruların birinden 2 nokta, diğerinden 1 nokta seçilmelidir. Buna göre oluşabilecek üçgenlerin sayısına $s(A)$ denirse :

$$s(A) = \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2} + \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{1} = 3 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 18 + 12 = 30 \text{ olur.}$$

Tüm durumların sayısı $s(E) = \binom{7}{3} = 35$ olur.

Buna göre doğrular üzerinde bulunan 7 noktadan rastgele seçilen 3 noktanın üçgen oluşturma olasılığı :

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7} \text{ olur.}$$

Örnek9: Hilesiz 3 madeni paranın havaya atılması deneyinde en az birinin yazı gelme olasılığını bulunuz.

En az birinin yazı gelme olayı C ise $C = \{(Y,Y,Y), (Y,Y,T), (Y,T,Y), (T,Y,Y), (T,T,Y), (Y,T,T), (T,Y,T)\}$ biçimindedir. O halde

$$P(C) = \frac{s(C)}{s(E)} = \frac{7}{8} \text{ olur.}$$

Örnek10: 4 tane A marka, 5 tane B marka, 2 tane C markadan oluşan özdeş gömlekler yan yana diziliyor. A marka gömleklerin yan yana gelme olasılığını bulunuz.

Bu deneyde örnek uzayın eleman sayısı

$$s(E) = \frac{11!}{4! \cdot 5! \cdot 2!} \text{ olur. 4 tane A marka gömlek}$$

bir grup olarak düşünülürse A marka gömleklerin yan yana gelme durumlarının

$$\text{sayısı } s(A) = \frac{8!}{5! \cdot 2!} \text{ olur. Bu durumda A marka}$$

gömleklerin yan yana gelme olasılığı :

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{\frac{8!}{5! \cdot 2!}}{\frac{11!}{4! \cdot 5! \cdot 2!}} = \frac{8! \cdot 4!}{11! \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!} \\ &= \frac{24}{11 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{4}{165} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek11: Köşeleri bir çember üzerindeki 8 farklı noktadan seçilen bir çokgenin beşgen olma olasılığı nedir ?

Bir çokgenin oluşması için en az üç nokta gereklidir:

$$s(E) = \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8}$$

$$= 2^8 - [\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2}]$$

$$= 256 - (1 + 8 + 28) = 256 - 37 = 219 \text{ olur.}$$

Çokgenin beşgen olma durumlarının sayısı

$$s(B) = \binom{8}{5} = 56 \text{ olur. Seçilen bir çokgenin}$$

beşgen olma olasılığı

$$P(B) = \frac{s(B)}{s(E)} = \frac{56}{219} \text{ bulunur.}$$

- Bir deneye ait sonlu örnek uzay $E=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun. Bu örnek uzayın en az bir elemanının olasılığı diğerlerinden farklı olduğu takdirde bu E örnek uzayına **eş olumlu olmayan örnek uzay** denir.

Örnek12: Bir okulun bursluluk sınavına giren Kuzey, Güney, Doğu, Batı isimli 4 öğrenciden Batı'nın sınavı kazanma olasılığı Kuzey'in, Güney'in sınavı kazanma olasılığı Doğu'nun iki katı ; Kuzey'in sınavı kazanma olasılığı Güney'in 4 katıdır. Buna göre Doğu'nun yarışı kazanma olasılığını bulunuz.

Kuzey'in sınavı kazanma olasılığı : $P(K)$

Güney'in sınavı kazanma olasılığı : $P(G)$

Doğu'nun sınavı kazanma olasılığı : $P(D)$

Batı'nın sınavı kazanma olasılığı : $P(B)$ olsun.

$$P(B) = 2 \cdot P(K)$$

$$P(G) = 2 \cdot P(D)$$

$$P(K) = 4 \cdot P(G) \text{ olduğundan}$$

$$P(G) = 2k \text{ alınırsa } P(D) = k, P(K)=8k, P(B) = 16k \text{ olur. Buradan}$$

$$P(E) = P(K) + P(G) + P(D) + P(B)$$

$$1 = 8k + 2k + k + 16k$$

$$1 = 27k \Rightarrow k = \frac{1}{27} \text{ olur. Bu durumda Doğu'nun sınavı kazanma olasılığı :}$$

$$P(D) = k = \frac{1}{27} \text{ dir.}$$

Örnek13: Hileli bir zarı attığımızda, herhangi bir sayının üst yüze gelme olasılığı, sayının küpü ile doğru orantılıdır. Buna göre zar bir kez atılınca üst yüze asal sayı gelme olasılığını bulunuz.

Atılan zar hileli olduğundan

$$1 \text{ gelme olasılığı } P(\{1\}) = 1^3 \cdot k = k$$

$$2 \text{ gelme olasılığı } P(\{2\}) = 2^3 \cdot k = 8k$$

$$3 \text{ gelme olasılığı } P(\{3\}) = 3^3 \cdot k = 27k$$

$$4 \text{ gelme olasılığı } P(\{4\}) = 4^3 \cdot k = 64k$$

$$5 \text{ gelme olasılığı } P(\{5\}) = 5^3 \cdot k = 125k$$

6 gelme olasılığı $P(\{6\}) = 6^3 \cdot k = 216k$ biçimindedir. Bu olaylar ayrıktır ve zarın 6 yüzü olduğundan

$$P(E) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\})$$

$$1 = k + 8k + 27k + 64k + 125k + 216k$$

$$1 = 441k \Rightarrow k = \frac{1}{441} \text{ bulunur. Üst yüze asal sayı gelme olasılığı :}$$

$$P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = 8k + 27k + 125k = 160k$$

$$= 160 \cdot \frac{1}{441} = \frac{160}{441} \text{ bulunur.}$$